



Universidad Nacional de Salta

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TRABAJO FINAL DE LA LICENCIATURA EN MATEMATICA

**Aplicación de la Transformada de Fourier, en la
resolución de problemas mixtos, definidos en
dominios no acotados**

Directora: Lic. Ana María Aramayo

Angel Gustavo Tolaba

2014

Agradecimientos

Jesús llegó una tarde a las puertas de una ciudad . . .

Allí vio en un rincón algunas personas agrupadas que contemplaban un objeto en el suelo, y acercóse para ver qué cosa podía llamarles la atención.

Era un perro muerto, atado al cuello por la cuerda que había servido para arrastrarle por el lodo. . . .

Y todos los que estaban en el grupo miraban hacia el suelo con desagrado.

–Esto emponzoña el aire -dijo uno.

–Este animal putrefacto estorbará la vía por mucho tiempo -dijo otro.

–Mirad su piel -dijo un tercero–: no hay un solo fragmento que pudiera aprovecharse para cortar unas sandalias.

–Habrá sido ahorcado por ladrón -añadió otro.

Jesús les escuchó, y dirigiendo una mirada de compasión al animal inmundo:

–¡Sus dientes son más blancos y hermosos que las perlas! -dijo.

. . . ¡Sólo Él podía encontrar de qué condolerse y hasta algo que alabar en un perro muerto...!

Y todos, avergonzados, siguieron su camino, . . . *León Tolstoi Rusia, 1828-1910*

Este largo camino que representó mi carrera, me permitió mirar hacia atrás y ver que por momentos mi transito, fue a veces corriendo, otras veces sólo dando pequeños pasos, pero sin duda la paciencia y perseverancia hoy me regalan sus dulces frutos y aunque también encontré espinas, piedras y montañas que parecían infranqueables que menguaron mis fuerzas y aminoraron mis penitentes pasos, le doy gracias por que fueron ellas las que me mostraron las cálidas manos de amigos, compañeros y profesores que con cada palabra de aliento, bromas y sonrisas me limpiaron el polvo y me pusieron de pie para continuar. Sí, lo mejor fue conocer gente maravillosa que me ayudo a descubrir y a compartir el gusto por las matemáticas y anhelo retribuir una ínfima parte de todo lo que me brindaron. Gracias por ayudarme a no claudicar y enfrentar con una sonrisa las dificultades.

Quiero agradecer especialmente a mis seres queridos; mi familia que estuvo siempre multiplicando mis logros y alegrías y dividiendo mis penas y fracasos. A mi madre que con su infinito amor hizo todo posible. A mis hermanos, a Dani y mis sobrinos por ser esa hermana que la vida me regaló y por que siempre creyeron en mí aún cuando yo no estaba convencido de poder lograrlo. A Perla y Lucho que fueron mis mecenas en los momentos más difíciles.

También quiero agradecer a mi directora Ana María que supo guiarme y aceptar de buen agrado todas las sugerencias que quise aportar a mi tesis, por su fuerza impulsándome a volcar todos los conocimientos adquiridos, gracias por enseñarme con humildad y sin guardarse su experiencia y sabiduría.

A mis amigos y compañeros; Daniel, Caro, Pablo, María, Soledad, Vale, José, Silvia, Lore, Vane,

Cele, Rosana, Silvana, Noe, Gonzalo por todo los buenos momentos vividos y que seguiremos compartiendo. A Gabi y Nacho por ayudarme a iniciarme en \LaTeX , sin su ayuda todo hubiese sido más difícil. A Silvina por trasmitirme sin mezquindad todo sus conocimientos de la Transformada de Fourier y Distribuciones.

Una especial mención a mis profesores que me moldearon y trasmitieron la pasión por las matemáticas, Elda, Monica, Camilo, Jorge con ustedes aprendí de la belleza que esconden las demostraciones y empujarme a sacar diamantes de carbones.

Gracias a todos los que de algún modo colaboraron con la realización de mi tesis.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Organización de la Tesis	5
1.2. Introducción Histórica	6
1.3. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) de segundo orden	7
1.4. Clasificación de las EDP de segundo orden	9
1.5. Reducción de EDP lineales a la forma canónica. Clasificación en el caso general	11
1.5.1. Caso $N=2$	11
1.5.2. Caso hiperbólico	12
1.5.3. Caso parabólico	13
1.5.4. Caso elíptico	13
1.5.5. Caso General	13
2. Problemas Iniciales, de Contorno y Mixtos	16
2.1. Problemas a Resolver	16
2.2. Las Ecuaciones de Laplace, de Calor y de Onda	18
2.3. Problemas de Valores Iniciales, de Contorno y Mixtos	19
2.4. Separación de Variables	21
2.5. Algunos Resultados de Convergencia para Desarrollo en Series de Fourier	23
2.6. Aplicación del método de separación de variables a la ecuación del calor unidimensional.	29
2.7. Solución clásica de los problemas de Cauchy y de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de ondas unidimensional homogénea	33
2.8. El Principio de Duhamel	41
2.9. Conclusión	43
3. Transformada de Fourier	44
3.1. De la Serie a la Transformada de Fourier	44
3.2. La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$	46
3.3. La Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y el Teorema de Plancherel	63
3.4. La Transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < 2$	67
3.5. Conclusión	69
4. Distribuciones y Funciones de Test	70
4.1. Introducción a la Teoría de las Distribuciones	70
4.2. La TF y el Espacio de las Distribuciones Temperadas	76
4.3. Conclusión	80

5. La Transformada de Fourier Aplicada a problemas de contornos no acotados	81
5.1. Aplicaciones de la transformada de Fourier a las EDP	81
5.2. La Delta de Dirac	84
5.2.1. Extensión del concepto de derivada	87
5.2.2. Transformada de Fourier y la Delta de Dirac	91
5.2.3. Otras Propiedades de la Delta de Dirac	92
5.2.4. Series de Fourier y la Delta de Dirac	93
5.2.5. Las EDP y la Delta de Dirac	96
5.3. Las EDP y el problema no homogéneo	99
5.4. Conclusión	101
5.5. Apéndice Definiciones y Conceptos Usados	102

Capítulo 1

Introducción

1.1. Organización de la Tesis

OBJETIVOS:

- Estudio de la transformada de Fourier de distribuciones temperadas, con soporte compacto.
- Análisis de la existencia y unicidad de soluciones de los problemas de contorno, en términos de los coeficientes difusivos, términos fuentes y condiciones de contorno.
- Utilización de la transformada de Fourier para resolver problemas de difusión, definidos en dominios no acotados, con términos fuentes y coeficientes de difusión generalizados.

JUSTIFICACION

Las numerosas aplicaciones de los problemas de contorno en campos de la física y la tecnología, ha requerido el estudio matemático que permita dilucidar la existencia y unicidad de sus soluciones, antes de aplicar métodos de resolución. Algunos de estos requerimientos se pueden conseguir mediante la aplicación de la transformada de Fourier, tanto en la ecuación diferencial como en las condiciones de contorno e iniciales.

Por ejemplo, un problema de difusión puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + q(x, t) \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ T(x, 0) &= f(x) \quad x \in \Omega \\ T(x, t) &= g(x, t) \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0\end{aligned}$$

donde k es el término difusivo, q el término fuente, f la condición inicial y g la condición de contorno. Se pretende estudiar el efecto del coeficiente difusivo, el término fuente y las condiciones de contorno e iniciales, sobre la solución del problema y las características que esta tendrá en función de estos coeficientes.

También es interesante notar que en otras aplicaciones no es posible determinar a priori la frontera del problema, por lo que se toma un dominio suficientemente grande (no acotado) para resolver el problema de contorno. Una vez determinada la solución, se puede analizar el efecto de las condiciones iniciales.

Por otro lado, en el dominio puede existir una interface en la cual el término fuente, el flujo y por

lo tanto la solución, sean discontinuas. Para tratar con la discontinuidad en el término fuente y en el flujo, el problema original se transforma en uno nuevo con una solución suave. Tal transformación puede deducirse fácilmente mediante una extensión de discontinuidades en la dirección normal de la interface, que es expresada como un conjunto de nivel nulo de una función tridimensional. La interface puede ser considerada como una condición de borde artificial, la cual trunca el dominio infinito.

PLAN DE TRABAJO

Se estudiarán los siguientes tópicos:

1. Series de Fourier en espacios de Hilbert
2. Transformada de Fourier en los espacios L^p
3. Distribuciones temperadas y sus transformadas de Fourier
4. Análisis de la factibilidad de resolución de problemas de contorno, mediante la serie y transformada de Fourier
5. Utilización de la serie y transformada de Fourier, para la demostración de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de los problemas de contorno.

1.2. Introducción Histórica

A lo largo de la historia diferentes disciplinas como la Ingeniería, la Física han empleado métodos de análisis que tratan de reducir la complejidad matemática de un problema dado. Estas técnicas se basan en la transformación matemática de las ecuaciones, convirtiendo un problema complejo en otro más sencillo. En general podemos decir que este método permite reducir la complejidad de las ecuaciones mediante un proceso unívoco de cambio del dominio de las variables del problema.

Uno de estos métodos utiliza como herramienta *la transformada de Fourier*, que por ejemplo, obtiene la información frecuencial de una determinada función. Este tipo de transformaciones tienen su representación en la naturaleza, como cuando escuchamos un sonido se sabe si éste es grave o agudo. El cerebro interpreta el contenido de la información que le está llegando y es capaz de distinguir si está compuesta de frecuencias predominantemente altas o si, por el contrario, las que la componen son predominantemente bajas. Otra muestra presente en la naturaleza es la de la descomposición de la luz solar en distintos colores, ya sea cuando se forma un arco iris o bien cuando ésta atraviesa un prisma. En este caso, una radiación luminosa de composición incierta es descompuesta en haces de luz coloreada, o señales, de frecuencia simple. Esto es en definitiva, lo que se persigue cuando se habla de la Transformada de Fourier, o de la Serie de Fourier. Una herramienta matemática capaz de extraer la información frecuencial de una forma de onda una vez conocido su comportamiento temporal y viceversa.

La historia moderna de estas transformaciones comienza con Euler en 1748 que estudio los movimientos vibratorios de la cuerda.

Fue en 1807, cuando Jean-Baptiste-Joseph Fourier presentó en la Academia Francesa de las Ciencias, el resultado de unos estudios de la transmisión del calor en los que incluía un método de resolución para las ecuaciones allí planteadas. Este método es el conocido como Transformada de Fourier. La

presentación de su trabajo tuvo ilustres opositores como Euler, Laplace o Lagrange entre otros *por que no contenía nada nuevo y nada interesante*. Y aunque la academia le concedió un premio por su teoría, le acusó de ser poco riguroso en la obtención de los resultados. Y fue así que la publicación de su trabajo no se llevó a cabo hasta 15 años después, con su libro titulado *'La teoría Analítica del Calor'* en 1822. La cual se convirtió en su obra cumbre, que podemos decir, que en realidad no fue tanto su estudio del calor lo que lo hizo famoso sino el descubrir recursos matemáticos que más adelante dio nacimiento a una nueva rama de la matemática conocida como *Análisis Armónico* que hoy en día tiene múltiples aplicaciones, sólo por mencionar algunas, en electricidad en el análisis espectral de una señal para corriente alterna, en el procesamiento digital de imágenes, en neurociencia, en óptica, etc.



Jean B. Joseph Fourier

La Transformada clásica de Fourier en \mathbb{R}^n aún es un área de investigación activa sobre todo en objetos más generales como las distribuciones.

Las series de Fourier pueden ser estudiadas convenientemente en el contexto de los Espacios de Hilbert, lo que nos da una conexión entre el análisis armónico y el *análisis funcional*.

Una de las ramas más modernas del análisis armónico, que tiene sus raíces a mediados del siglo XX, es la de Grupos topológicos. La idea central que la motiva es la generalización de la Transformadas de Fourier sobre estos espacios.

La Transformada de Fourier es una herramienta muy extendida y aceptada por innumerables seguidores, hasta tal punto que en 1867 Lord Kelvin llegó a afirmar: *"El teorema de Fourier no es solamente uno de los resultados más hermosos del análisis moderno, sino que puede decirse además que proporciona un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la física moderna, por recónditas que sean."*

1.3. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) de segundo orden

Daremos una introducción somera al estudio de las ecuaciones a derivadas parciales (EDP) más concretamente a las de segundo orden.

Una EDP es una ecuación en la que la incógnita es una función de dos o más variables independientes y en dicha ecuación aparecen derivadas parciales respecto de las variables independientes de la función incógnita.

Se denomina orden de una EDP al mayor de los órdenes de las derivadas parciales que aparecen en la misma. Así, por ejemplo, si $u = u(x_1, x_2)$ es una función incógnita de las dos variables independientes x_1, x_2 y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no constante dada, entonces la ecuación $F\left(u + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\right) = 0$ es una EDP de orden cuarto. Nosotros nos centraremos en EDP de segundo orden.

Sea N un número entero mayor que 1. Una EDP de segundo orden en las N variables independientes x_1, x_2, \dots, x_N y en la función incógnita $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ es una expresión de la forma:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right) = 0 \quad (1.1)$$

donde $F : V \rightarrow \mathbb{R}$, con $V \subset \mathbb{R}^{(N+1)^2}$ abierto, es una función continua dada, es decir con la notación habitual $F \in C^0(V)$.

Observación 1.3.1. En la definición, para simplificar la notación, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $u = u(x)$,

$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ el vector gradiente de u

$D^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right)$ La matriz hessiana de u .

Con esta notación reescribimos la EDP (1.1) como:

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad (1.2)$$

El concepto de solución de una EDP resulta importante. El análisis de dicho concepto que a primera vista puede parecer evidente, ha dado lugar al desarrollo de nociones de gran importancia en la actualidad, tales como las Distribuciones, los espacios de Sobolev, etc. Por el momento nos limitamos a introducir el siguiente concepto.

Definición 1.3.1. Una solución clásica de 1.2 es cualquier pareja (U, u) tal que:

1. $U \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto no vacío.
2. $u \in C^2(U)$
3. $(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \in V, \forall x \in U$
4. $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0, \forall x \in U$

Se dice entonces, que u es solución de (1.2) en el abierto U .

Definición 1.3.2. Una EDP lineal de segundo orden en las variables independientes $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ y con la incógnita u , es una EDP de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \quad (1.3)$$

donde $a_{i,j}, b_i, c$ y f son funciones dadas en $C^0(\Omega)$, con Ω un abierto en \mathbb{R}^N .

A las funciones $a_{i,j}, b_i, c$, las llamamos los coeficientes de (1.3) mientras que la función f es el término independiente de la ecuación.

Si $f \equiv 0$, se dice que (1.3) es homogénea. Si las funciones $a_{i,j}, b_i, c$ son todas constantes se dice que (1.3) es una EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Observación 1.3.2. ■ En (1.3) siempre supondremos, lo cual no resulta restrictivo, que $a_{i,j} = a_{j,i}$

- Una solución clásica de (1.3) es cualquier par (U, u) tal que $U \subset \Omega$ sea un abierto no vacío, $u \in C^2(U)$ y

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x), \forall x \in U$$

En el caso que $f \equiv 0$, el conjunto de todas las soluciones clásicas 1.3 definidas en un mismo abierto $U \subset \Omega$, es evidentemente, un subespacio vectorial de $C^2(U)$.

- Otra dos clases muy importantes de EDP de segundo orden son las semilineales, que son de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, Du)$$

y las EDP cuasilineales cuya forma general es:

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x, u, Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, Du)$$

Definición 1.3.3. Diremos que $F : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función regular, si $F \in C^1(V)$ es decir F y todas sus derivadas primeras son continuas.

1.4. Clasificación de las EDP de segundo orden

Para poder dar una clasificación sencilla de las EDP de segundo orden, trabajaremos con una ecuación semilineal de segundo orden en dos variables independientes (que denotaremos ahora x e y). Cambiaremos la notación utilizada hasta ahora y denotaremos u_x, u_y, u_{xx}, \dots a las distintas derivadas parciales de la función u respecto de las variables independientes. Con esta notación consideramos

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = d(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1.4)$$

donde a, b, c y d son funciones regulares dadas. El problema de Cauchy o problemas de valores iniciales (PVI) para (1.4) consiste en hallar una solución u de (1.4) que verifique condiciones dadas para u, u_x y u_y sobre una curva dada γ del plano. Supongamos que γ viene dada en forma paramétrica por

$$x(s) = f(s), \quad y(s) = g(s), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

y reescribamos sobre la curva γ los valores iniciales,

$$u|_{\gamma} = h(s), \quad u_x|_{\gamma} = \phi(s), \quad u_y|_{\gamma} = \psi(s) \quad (1.5)$$

Basta derivar respecto de s en la primera condición inicial para darse cuenta de que obtenemos tres condiciones para u sobre γ que impone las condiciones de compatibilidad

$$h'(s) = \phi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s)$$

sobre las condiciones iniciales. Razonando de manera parecida, también podemos obtener condiciones de compatibilidad para las derivadas de mayor orden

$$\begin{aligned} u_{xx}(f(s), g(s))f'(s) + u_{xy}(f(s), g(s))g'(s) &= \phi'(s), \\ u_{xy}(f(s), g(s))f'(s) + u_{yy}(f(s), g(s))g'(s) &= \psi'(s), \end{aligned}$$

De este modo, si $u(x, y)$ es solución de (1.4) con las condiciones iniciales (1.5) obtenemos que las derivadas segundas de u a lo largo de la curva γ deben verificar el sistema lineal

$$\begin{cases} a(f(s), g(s))u_{xx} + 2b(f(s), g(s))u_{xy} + c(f(s), g(s))u_{yy} = d(s) \\ f'(s)u_{xx} + g'(s)u_{xy} = \phi'(s) \\ f'(s)u_{xy} + g'(s)u_{yy} = \psi'(s) \end{cases} \quad (1.6)$$

donde la función $d(s) = d(f(s); g(s); h(s); \phi(s); \psi(s))$. Estas derivadas segundas quedan determinadas de forma unívoca siempre que

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a(f(s), g(s)) & 2b(f(s), g(s)) & c(f(s), g(s)) \\ f'(s) & g'(s) & 0 \\ 0 & f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} = a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 \quad (1.7)$$

sea no nulo. En el caso contrario, es decir si $\Delta(s) = 0$, el sistema (1.6) puede no tener solución y, en caso de tenerla, tendría un número infinito.

Definición 1.4.1. Se dice que la curva γ es característica respecto de la ecuación (1.4) si $\Delta(s) = 0$ a lo largo de γ . Se dice que γ no es característica (respecto de la ecuación (1.4)) si $\Delta(s) \neq 0$ a lo largo de γ .

La condición de curva característica (1.7) puede ser escrita

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)(dx dy) + c(x, y)(dx)^2 = 0.$$

Si $a \neq 0$, podemos despejar dy/dx y obtener la ecuación diferencial ordinaria (si $c \neq 0$, una ecuación análoga se obtiene para dx/dy)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y) \pm \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)}}{a(x, y)} \quad (1.8)$$

cuyas soluciones $y = y(x)$ proporcionan las curvas características de (1.4).

La existencia o no de curvas características está asociada al signo de la cantidad

$$\mathcal{D}(x, y) = a(x, y)c(x, y) - b^2(x, y)$$

cantidad denominada *discriminante* de la ecuación (1.4) en el punto $(x, y) \in U$. Así podemos definir

Definición 1.4.2. La ecuación (1.4) es llamada hiperbólica, parabólica o elíptica en el punto $(x, y) \in U$ si el discriminante \mathcal{D} de la ecuación en el punto (x, y) es negativo, nulo o positivo, respectivamente. La ecuación (1.4) es hiperbólica, parabólica o elíptica en U si lo es en cada uno de sus puntos.

Ahora podemos deducir que:

- Si (1.4) es hiperbólica en U existen dos curvas características de la ecuación funcionalmente independientes.
- Si (1.4) es parabólica en U entonces, existe una única curva característica de la ecuación funcionalmente independiente.
- Si (1.4) es elíptica en U , entonces la ecuación no posee curvas características (reales).

Observación 1.4.1. Es posible generalizar el concepto de curva característica a hipersuperficie característica tanto al caso de la EDP lineal N -dimensional (1.3) como al caso de EDP no lineales. El concepto de hipersuperficie característica está íntimamente relacionado con el importante teorema de Cauchy-Kovalévskaya que afirma la existencia de solución local analítica de un problema de Cauchy para un sistema de EDP con condición inicial sobre una hipersuperficie no característica cuando los coeficientes de la ecuación, el dato inicial y la hipersuperficie son analíticos .

1.5. Reducción de EDP lineales a la forma canónica. Clasificación en el caso general

Nos planteamos ahora, establecer una clasificación de ecuaciones lineales de segundo orden en el caso general $N > 2$. Probaremos que cuando consideramos ecuaciones con coeficientes constantes, éstas pueden reducirse a una forma simplificada denominada canónica. En el caso particular $N = 2$ haremos esta reducción en el caso semilineal con coeficientes variables. Empezamos a trabajar en este último caso.

1.5.1. Caso $N=2$

Consideramos la ecuación semilineal (1.4). Nos planteamos encontrar un cambio local de variables independientes en un entorno \mathcal{O} de un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ dado por

$$\begin{cases} s = \phi(x, y) \\ t = \psi(x, y) \end{cases} \quad \text{con } \phi, \psi \in C^2(\mathcal{O})$$

con jacobiano $\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x$ no nulo en \mathcal{O} y tal que la ecuación (1.4) se transforme en $u_{st} = g(s, t, u, u_s, u_t)$ con s, t variando en el abierto imagen. Supondremos también que no todos los coeficientes son nulos en (x_0, y_0) . Utilizando la regla de la cadena y tras un sencillo cálculo obtenemos

$$\begin{aligned} u_x &= u_s \phi_x + u_t \psi_x \\ u_y &= u_s \phi_y + u_t \psi_y \\ u_{xx} &= u_{ss} (\phi_x)^2 + 2u_{st} \phi_x \psi_x + u_{tt} (\psi_x)^2 + u_s \phi_{xx} + u_t \psi_{xx} \\ u_{xy} &= u_{ss} \phi_x \phi_y + u_{st} (\phi_x \psi_y + \psi_y \phi_x) + u_{tt} \psi_x \psi_y + u_s \phi_{yx} + u_t \psi_{yx} \\ u_{yy} &= u_{ss} (\phi_y)^2 + 2u_{st} \phi_y \psi_y + u_{tt} (\psi_y)^2 + u_s \phi_{yy} + u_t \psi_{yy} \end{aligned}$$

Llevando este cambio a la ecuación (1.4) y pasando todas las derivadas de primer orden al segundo miembro, llegamos a la ecuación en las nuevas variables

$$A(s, t)u_{ss} + 2B(s, t)u_{st} + C(s, t)u_{tt} = g(s, t, u, u_s, u_t) \quad (1.9)$$

cuyos coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= a(\phi_x)^2 + 2b\phi_x\phi_y + c(\phi_y)^2 \\ B &= a\phi_x\psi_x + b(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + c\phi_y\psi_y \\ C &= a(\psi_x)^2 + 2b\psi_x\psi_y + c(\psi_y)^2 \end{aligned}$$

El discriminante de la nueva ecuación (1.9) viene dado por

$$\tilde{\mathcal{D}} = (\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x)^2 \mathcal{D}(x, y)$$

lo que demuestra que el signo de este discriminante es invariante bajo la transformación de variables anterior.

1.5.2. Caso hiperbólico

Supongamos que la ecuación (1.4) es hiperbólica en (x_0, y_0) y por comodidad, supongamos que $a(x_0, y_0) \neq 0$ (si fuese $c(x_0, y_0) \neq 0$ razonaríamos de manera análoga intercambiando los papeles de las variables; si ambos coeficientes fuesen cero, ya tendríamos la ecuación en su forma canónica). Para anular los coeficientes A y C de (1.9), bastaría tomar como funciones ϕ y ψ dos curvas características de la ecuación (1.4). En concreto, podemos tomar las funciones de la forma

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= y_1(x) - y \\ \psi(x, y) &= y_2(x) - y \end{aligned}$$

con y_1 e y_2 soluciones locales de las ecuaciones diferenciales (1.8) que pasan por el punto (x_0, y_0) . El jacobiano de la transformación viene dado por

$$\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x = y_2' - y_1' = -\frac{2}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

que, evidentemente es no nulo en un entorno del punto. De la expresión del discriminante $\tilde{\mathcal{D}}$ y teniendo en cuenta que A y C son nulos, deducimos que $B^2 > 0$. Dividiendo la nueva ecuación por el coeficiente B , llegamos a la forma canónica

$$u_{st} = F(s, t, u, u_s, u_t)$$

Un cambio de variables adicional $\sigma = s + t$, $\tau = s - t$, transforma esta ecuación

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\tau\tau} = G(\sigma, \tau, u, u_\sigma, u_\tau)$$

en la conocida ecuación de ondas semilineal. En este caso hiperbólico, se dice que esta última ecuación es la forma canónica de (1.4).

1.5.3. Caso parabólico

Supongamos ahora que la ecuación (1.4) es parabólica en (x_0, y_0) y, de nuevo, que el coeficiente a es no nulo en (x_0, y_0) . En este caso, la ecuación diferencial (1.8) se reduce a una única ecuación. Sea y_1 la solución de dicha ecuación que pasa por (x_0, y_0) y consideremos $\psi(x, y) = y_1(x) - y$ y ϕ una función regular tal que el jacobiano $\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x$ sea no nulo en un entorno de (x_0, y_0) . En este caso el coeficiente C es idénticamente nulo y, gracias al carácter parabólico de la ecuación, $B^2 - AC = 0$, obtenemos $B \equiv 0$. Dividiendo la ecuación por el coeficiente A (necesariamente no nulo) llegamos

$$u_{ss} = F(s, t, u, u_s, u_t)$$

la forma canónica para ecuaciones parabólicas semilineales de segundo orden en dos variables independientes.

1.5.4. Caso elíptico

Por simplicidad, discutiremos este último caso cuando la ecuación (1.4) sea de coeficientes constantes, es decir, cuando a, b y $c \in \mathbb{R}$.

Si la ecuación es elíptica (en \mathbb{R}^2) tenemos que los coeficientes a y c son no nulos. En este caso la ecuación (1.8) no admite soluciones reales, pero, sin embargo, sí admite dos soluciones complejas $y_1(x) = \lambda x$ y $y_2(x) = \bar{\lambda} x$ donde $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\bar{\lambda}$ son las soluciones de la ecuación $a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$. Podríamos razonar como en el caso hiperbólico y tomar $\phi(x, y) = y_1(x) - y$ y $\psi(x, y) = y_2(x) - y$, pero para trabajar en el campo real consideraríamos las partes reales e imaginarias de las funciones anteriores. De esta manera, dado el cambio

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}(\phi + \psi) = \alpha x - y \\ t = \frac{1}{2i}(\phi - \psi) = \beta x \end{cases}$$

Es fácil comprobar que este cambio tiene jacobiano no nulo, que el coeficiente B de la ecuación en las nuevas variables se anula y que $A = C \neq 0$. Dividiendo por este último coeficiente, obtenemos la forma canónica:

$$u_{ss} + u_{tt} = F(s, t, u, u_s, u_t)$$

que es la ecuación de Laplace semilineal.

1.5.5. Caso General

Consideramos en este caso la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (1.10)$$

con $f \in C^0(\Omega)$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, donde $a_{i,j} = a_{j,i}, b_i, c \in \mathbb{R}$ dados. Denotemos por A a la matriz simétrica $A = (a_{i,j})$. Sea $p \geq 0$ el número de autovalores positivos de A y $q \geq 0$ el número de autovalores negativos de A , en ambos casos, contando a cada autovalor tantas veces como indique su

multiplicidad. Evidentemente, $p + q$ es el rango de A . Por la ley de inercia de Sylvester, existe una matriz real $N \times N$ no singular, que denotaremos por P , tal que

$$A = PDP^t, \text{ con } D = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con I_p e I_q denotan respectivamente la matriz identidad $p \times p$ y $q \times q$.

En el caso en que p ó q es igual a N , se dice que la ecuación (1.10) es elíptica. Si $(p, q) = (N - 1, 1)$ ó $(p, q) = (1, N - 1)$, se dice que la ecuación (1.10) es hiperbólica. Finalmente, se dice ecuación (1.10) es parabólica si $(p, q) = (N - 1, 0)$ ó $(p, q) = (0, N - 1)$, y la componente N -ésima del vector $P^{-1}b$, donde $b = (b_1, \dots, b_N)^t$, es no nula.

Se puede demostrar el resultado siguiente:

Teorema 1.5.1. *Con la notación precedente, consideremos el cambio de variables independientes y de función incógnita dado por*

$$y = P^{-1}x, \quad v(y) = uxe^{g(y)}$$

donde

$$g(y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p [Pb]_i y_i - \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^{p+q} [Pb]_i$$

en estas nuevas variables, la ecuación (1.10) se transforma, según los casos, como sigue:

1. Si (1.10) es elíptica, la ecuación se transforma en

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + kv = h(y) \tag{1.11}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $h \in C^0(P^{-1}(\Omega))$.

2. Si la ecuación (1.10) es hiperbólica, ésta se transforma en

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_N^2} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + kv = h(y) \tag{1.12}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $h \in C^0(P^{-1}(\Omega))$.

3. Si la ecuación (1.10) es parabólica, ésta se transforma en

$$[Pb]_N \frac{\partial v}{\partial y_N} + \delta \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + kv = h(y) \tag{1.13}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $h \in C^0(P^{-1}(\Omega))$, y $\delta = 1$ si $p = N - 1$ ó $\delta = -1$ si $q = N - 1$.

Observación 1.5.1. En los casos 1. y 2. del teorema precedente, las ecuaciones (1.11) y (1.12) son denominadas, respectivamente, la forma canónica de (1.10) cuando ésta es elíptica ó cuando es hiperbólica. En el caso 3., multiplicando si es preciso (1.13) por -1, ésta queda en la forma

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial y_N} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \beta v = l(y) \tag{1.14}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $l \in C^0(P^{-1}(\Omega))$.

Si en (1.14) hacemos el cambio de variables

$$y_N = \alpha t, \quad w(y - 1, \dots, y_{N-1}, t) = v(y - 1, \dots, y_{N-1}, \alpha t) e^{\beta t}$$

se obtiene la denominada forma canónica de la ecuación (1.10) en el caso parabólico:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2} = \hat{l}(y - 1, \dots, y_{N-1}, t) \tag{1.15}$$

Capítulo 2

Problemas Iniciales, de Contorno y Mixtos

2.1. Problemas a Resolver

Nuestro estudio se centrará en las ecuaciones de Calor, Laplace, Poisson y de Ondas, que como podremos apreciar mas adelante, son tres E.D.P. lineales de segundo orden con los coeficientes constantes, veremos sus respectivas representaciones canónicas. Recordemos que no existe una teoría general de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), lo que podemos desarrollar son teorías generales de **"tipo" de EDP**. Además, no todas resultan tener el mismo interés, algunas sólo tienen un interés académico, mientras que la importancia de otras reside en tener su origen en problemas de la física y de otras ciencias de la naturaleza ó en las matemáticas mismas.

De manera similar a lo que sucede con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, los problemas en la práctica que se plantean para las E.D.P. suelen consistir en añadir a la ecuación una o varias condiciones adicionales que la solución debe satisfacer. Como veremos a continuación en el caso de las EDP. lineales de segundo orden con coeficientes constantes el comportamiento frente a un mismo conjunto de condiciones varía de una ecuación a otra.

Supongamos fijada una función $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ y consideremos los problemas:

$$\begin{array}{l}
 (a) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1) & \text{en } \mathbb{R} \end{array} \right. &
 (b) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1) & \text{en } \mathbb{R} \end{array} \right. \\
 (c) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1) & \text{en } \mathbb{R} \end{array} \right. &
 (d) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x_1, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1) & \text{en } \mathbb{R} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Para los cuatro problemas nos planteamos hallar una solución clásica global, es decir, una función $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que satisfaga las condiciones (denominadas iniciales):

$$u(x_1, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1), \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

y también verifique la EDP correspondiente en todo \mathbb{R}^2 . Analicemos qué sucede en cada uno de los cuatro problemas.

Problema(a):

Si u es solución de (a) entonces se debe cumplir que $\varphi'(x_1) = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$ ya que;

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, 0) = \varphi'(x_1) = 0$$

Es decir que para que el problema (a) posea solución clásica global, es necesario que φ sea una constante, esta condición es lo que se denomina condición de compatibilidad para el problema (a).

Por otra parte si $\varphi \equiv c$ el problema (a) posee infinitas soluciones, así por ejemplo, todas las funciones de la forma $u(x_1, x_2) = cx_2 + ax_2^2$, con $a \in \mathbb{R}$ arbitrario son solución de (a).

En resumen, en caso de existir solución, son infinitas.

Problema(b):

Si u es solución de (b) entonces en particular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

pero $u(x_1, 0) = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$ entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

pero se debe cumplir $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1)$ luego $\varphi \equiv 0$. Es decir, el problema (b) posee solución si y sólo si, φ es idénticamente nula. Observemos que la conclusión parece natural si pensamos que la EDP en (b) es de primer orden en la variable x_2 , mientras que se están imponiendo dos condiciones en x_2 .

Problema(c):

Si proponemos u como solución de (c), entonces la función definida por:

$$v(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}(s, 0) ds - \int_0^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, t) dt, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 y además

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{\partial u}{\partial x_1} \text{ en } \mathbb{R}^2 \text{ y para todo } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) - \int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, t) dt = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, t) dt = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

luego las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo \mathbb{R}^2 , lo que implica u es función analítica de \mathbb{R}^2 y por lo tanto φ tiene que ser una función analítica en \mathbb{R} . En consecuencia

si φ no es una función analítica el problema (c) no posee solución clásica.

Problema (d):

Se puede comprobar que

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_{x_1-x_2}^{x_1+x_2} \varphi(s) ds$$

es una solución del problema (d). Y se puede demostrar que esta solución es única para cualquier $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Observación 2.1.1. ■ Tratamos de ver el comportamiento bajo las mismas condiciones iniciales para EDP de segundo orden lineales y semilineales y que no es posible, "a priori", afirmar cuando tendremos: solución, solución única o no existe solución, por esa razón dijimos que no contamos con una teoría general para las EDP.

- Los problemas de las EDP dependen de las condiciones de contorno para poder encontrar: solución, solución única o la no existencia de la misma. Por eso decimos que las EDP están fuertemente condicionadas a los valores de contorno.

2.2. Las Ecuaciones de Laplace, de Calor y de Onda

Consideremos las tres EDP siguientes:

$$-\Delta u(x) = f(x), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \tag{2.3}$$

donde Δu es el laplaciano de u en las variables $x = (x_1, \dots, x_N)$ y viene dado por $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$,

siendo $N \geq 1$ y c en (2.2) es una constante positiva dada.

A (2.1) se la denomina ecuación de Poisson, y en el caso particular en que $f \equiv 0$, es conocida como la ecuación de Laplace.

A(2.2) se la denomina ecuación de ondas y (2.3) se la denomina ecuación de calor.

Las tres ecuaciones, pueden ser consideradas representaciones canónicas de un gran número de EDP lineales de segundo orden con coeficientes constantes, y éstas tres aparecen en problemas fundamentales de la física.

La ecuación de Poisson aparece en teoría de campos (electroestáticos, gravitatorios, etc). La ecuación de Laplace, cuando $N = 2$, aparece en la teoría de funciones de variable compleja.

La ecuación (2.3), para $N \leq 3$, describe bajo hipótesis físicas adecuadas, y tras normalización, la evolución de la temperatura $u(x, t)$, en cada instante t y en cada punto $x \in \mathbb{R}^N$, de un cuerpo sometido a una fuente de calor determinada por $f(x, t)$.

Por otra parte la ecuación (2.2) describe en el caso $N = 1$, y bajo hipótesis adecuadas, las pequeñas vibraciones de una cuerda elástica. El origen histórico de la ecuación reside en el estudio de las

vibraciones de la cuerda de un violín. Finalmente, si $N = 2$ ó $N = 3$, la ecuación (2.2) describe la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas en el vacío.

Las ecuaciones de Laplace y de Poisson son denominadas EDP estacionarias, es decir que no dependen del tiempo, mientras que las ecuaciones de ondas y de calor se dice que son de evolución.

Aparte de las tres antes citadas, hay muchas otras EDP que aparecen en la Física. Por ejemplo, si estudiamos la propagación de ondas en un medio físico no vacío, aparece una EDP que resulta de añadir en el primer término de la ecuación (2.2) un término de rozamiento, obteniéndose la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \quad (2.4)$$

que se conoce como la ecuación del telegrafista, y que aproxima bien, por ejemplo, a la propagación de ondas de radio en la atmósfera.

2.3. Problemas de Valores Iniciales, de Contorno y Mixtos

Usamos la notación u_t, u_{tt} para designar a $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ respectivamente. De la misma forma se usará u_x, u_{xx} cuando x es unidimensional. Planteamos a continuación varios de los problemas para las tres EDP (2.1), (2.2) y (2.3).

En primer lugar, veamos los problemas de valores iniciales (o problemas de Cauchy) para las EDP de calor y de ondas.

a) El problema de valores iniciales para la EDP del calor puede ser formulado como el problema de hallar una función $u : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$(PCC) \begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas.

b) El problema de valores iniciales para la EDP de ondas se formula como el problema de hallar una función $u : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$(PCO) \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $u_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, resultan de gran interés un tipo diferente de problemas (mas que los PVI). Restringiéndonos a las tres ecuaciones "modelos" (la de Poisson, de Calor, Ondas) tenemos los problemas de contornos (en el caso de la ecuación de Poisson) y los mixtos, es decir donde tenemos valores iniciales y de contorno (el caso de la ecuación de calor y ondas).

Como podemos ver en algunos ejemplos, la diferencia entre los dos tipos de problemas viene determinado por la presencia de la variable "tiempo" en la ecuación.

Ejemplos básicos de estos tipos de problemas son los siguientes:

c) El Problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson.

En términos imprecisos, sólo para ilustrar el problema podemos formularlo como sigue. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado de frontera $\partial\Omega$ y las funciones: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, hallar una función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(PDP) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Precisando más y suponiendo $f \in C^0(\Omega)$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$, se define una solución (clásica) de (PDP) como cualquier función $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tal que $-\Delta u(x) = f(x)$, $\forall x \in \Omega$ y $u(x) = g(x) \forall x \in \partial\Omega$. Es posible encontrar una solución "más débil" de PDP.

d) Problema Mixto de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de calor.

También en términos imprecisos, este problema se formula como sigue. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, conjunto abierto acotado, $T \in (0, +\infty]$, $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ y $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, hallar una función $u : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(PCDC) \begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Existen varias nociones de solución para el problema (PCDC).

Podemos considerar un caso particular (PCDC) cuando $N = 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de la forma $(0, l)$. En este caso $\partial(0, l) = \{0, l\}$, el problema (PCDC) suele escribirse como:

$$(PCDC) \begin{cases} u_t - u_{xx} = f & \text{en } (0, l) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } (0, l) \\ u(0, t) = \alpha(t), u(l, t) = \beta(t), & t \in (0, T) \end{cases}$$

siendo $f : (0, l) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones dadas.

e) El Problema Mixto de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de onda.

El problema consiste en, dados los datos Ω , T , f , g y u_0 como el problema (PCDC), más $u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $c > 0$ en hallar una función $u : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(PCDO) \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

como en el caso anterior, existen varios conceptos posibles de solución del problema (PCDO).

De manera análoga al caso particular de (PCDO) cuando $N = 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de la forma $(0, l)$. En cuyo caso, el problema (PCDO) suele escribirse como:

$$(PCDO) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f & \text{en } (0, l) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } (0, l) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{en } (0, l) \\ u(0, t) = \alpha(t) & \text{en } (0, T) \\ u(l, t) = \beta(t) & \text{en } (0, T) \end{cases}$$

siendo $f : (0, l) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$, $u_1 : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones dadas.

El punto clave en el análisis de los problemas anteriores es el concepto de solución.

Una vez establecido el concepto de solución, el análisis de cualquiera de estos problemas pasa en primera instancia por establecer resultados de existencia y/o unicidad de la solución, "dependencia continua" respecto de los datos, etc.

Naturalmente, otro punto importante consiste en establecer métodos de cálculo de las soluciones.

A continuación mencionaremos algunos métodos y teoremas que consideramos relevantes para abordar los distintos problemas mixtos.

2.4. Separación de Variables

El método de separación de variables es, en principio, aplicable a EDP lineales de segundo orden en dos variables independientes x e y de la forma:

$$a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u + b_1(y)u_{yy} + b_2(y)u_y + b_3(y)u = 0$$

La idea consiste en buscar soluciones de la EDP de la forma $X(x)Y(y)$, es decir, con las variables separables o separadas, y de tal forma que satisfagan parte de las condiciones (las homogéneas de contorno) que aparezcan junto con la EDP. De esta forma se suele obtener una sucesión de funciones $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$, y a partir de ellas se busca la solución u del problema como una serie de las u_n . En este proceso se obtiene una solución formal para la cual, a posteriori, hay que estudiar en que sentido converge, y en que sentido define una solución del problema de que se trate.

Para ilustrar mejor el método consideremos el siguiente problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de ondas unidimensional

$$\left. \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } (0, 1) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } (0, 1) \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{en } (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{en } t > 0 \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

con $u_0 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada.

La idea del método de separación de variables para resolver (2.5) consiste en buscar, soluciones $u \in C^2([0, 1] \times [0, +\infty))$ no idénticamente nulas del problema auxiliar

$$\left. \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } (0, 1) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{en } t > 0 \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Obsérvese que el conjunto de todas las soluciones $u \in C^2([0, 1] \times [0, +\infty))$, constituye un subespacio vectorial de $C^2([0, 1] \times [0, +\infty))$. Dado que, cualquier combinación lineal finita de soluciones de (2.6) es también solución de (2.6).

Para buscar soluciones no nulas de (2.6), se separan las variables, buscando que u sea de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, con $x \in C^2([0, 1])$ y $T \in C^2([0, +\infty))$.

Si exigimos que u satisfaga la EDP, obtenemos la siguiente expresión $X''T = X\ddot{T}$ (donde $X' = \frac{dX}{dx}$, $\dot{T} = \frac{dT}{dt}$) como la solución no es idénticamente nula podemos escribir

$$\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T}$$

donde el único modo de que se cumpla esta igualdad es que ambos sean igual a una constante

$$\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T} = \lambda$$

La solución propuesta debe satisfacer las condiciones de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$, por lo tanto $X(0) = X(1) = 0$.

Luego obtenemos el siguiente problema de autovalores o también llamado problema de Sturm-Liouville

$$\left. \begin{aligned} X'' &= \lambda X \\ X(0) &= X(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Es decir, buscamos los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que (2.7) tiene solución X no idénticamente nula. Se puede comprobar que este es el caso si y solo si $\lambda = -n^2\pi^2$ con $n = 1, 2, \dots$. Cualquier solución de (2.7) es un múltiplo de $X_n(x) = \text{sen}(n\pi x)$.

Por otro lado, para $\lambda = -n^2\pi^2$, la ecuación diferencial ordinaria $\ddot{T}_n = -n^2\pi^2 T_n$ tiene por solución general

$$T_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \text{sen}(n\pi t)$$

Recordemos que cualquier combinación lineal finita de soluciones de (2.6) es también solución de (2.6). En consecuencia, para todo entero $m \geq 1$, la función

$$u^m(x, t) = \sum_{n=1}^m (A_n \cos(n\pi t) + B_n \text{sen}(n\pi t)) \text{sen}(n\pi x)$$

con A_n y B_n constantes arbitrarias, es solución de (2.6) pero para poder encontrar una solución de (2.5) esta debe ser de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\pi t) + B_n \text{sen}(n\pi t)) \text{sen}(n\pi x)$$

que debe cumplir las condiciones $u(x, 0) = u_0(x)$ y $u_t(x, 0) = 0$. Para poder encontrar u_t debemos derivar término a término la serie $u(x, t)$ y obtenemos

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi A_n \text{sen}(n\pi t) + n\pi B_n \cos(n\pi t)) \text{sen}(n\pi x)$$

que debe cumplir que $u_t(x, 0) = 0$, podemos concluir que esto se cumple si $B_n = 0, \forall n \geq 1$

Luego, se obtiene como solución (en principio formal)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi t) \text{sen}(n\pi x) \quad (2.8)$$

a la que le imponemos la condición $u(x, 0) = u_0(x)$, es decir,

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(n\pi x), x \in (0, 1) \quad (2.9)$$

Si u_0 es una combinación lineal finita de funciones $\text{sen}(n\pi x)$, es decir, u_0 es de la forma:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^m \gamma_n \text{sen}(n\pi x)$$

con $\gamma_n \in \mathbb{R}$ constantes dadas, la condición (2.9) conduce a $A_n = \gamma_n$, si $1 \leq n \leq m$, y $A_n = 0$, si $n > m$ luego la solución formal dada por (2.8) pasa a ser

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m \gamma_n \cos(n\pi t) \text{sen}(n\pi x)$$

donde se puede comprobar que es una solución (clásica) de (2.5) en el sentido de que pertenece a $C^2([0, 1] \times [0, +\infty))$, satisface la ecuación de ondas en todo punto de $[0, 1] \times [0, +\infty)$, y satisface $u(x, 0) = u_0(x)$ y $u_t(x, 0) = 0 \forall x \in [0, 1]$ y $u(0, t) = u(1, t) = 0 \forall t \in [0, +\infty)$.

Ahora analicemos lo siguiente: Si u_0 no es una combinación lineal finita de funciones de $\text{sen}(n\pi x)$, pero pertenece a $L^2(0, 1)$, es decir, si denotamos

$$A_n^* = 2 \int_0^1 u_0(x) \text{sen}(n\pi x) \quad n \geq 1 \quad (2.10)$$

entonces

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \text{sen}(n\pi x)$$

donde la serie converge a u_0 en $L^2(0, 1)$, en otras palabras la serie converge en media cuadrática a u_0 . Luego (2.8) y (2.9) nos conducen a que $A_n^* = A_n$ para todo $n \geq 1$ y por lo tanto obtenemos como solución formal de (2.5)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos(n\pi t) \text{sen}(n\pi x) \quad (2.11)$$

con los A_n^* dados por (2.10)

Observación 2.4.1. ■ El problema (2.5) es factible de resolver utilizando el Método de Separación de Variables, si $u_0(x)$ admita desarrollo en serie de Fourier.

- Si en el problema (2.5) además se tiene la condición $u_t(x, 0) = u_1(x)$ será factible de resolver utilizando el método descripto, si tanto $u_0(x)$ y $u_1(x)$ ambas admiten desarrollo en serie de Fourier y A_n, B_n son los coeficientes de Fourier de $u_0(x)$ y $u_1(x)$ respectivamente.
- Para poder determinar A_n, B_n dependemos de las condiciones iniciales por esa razón decimos que el problema (2.5) está **fuertemente condicionado** .

2.5. Algunos Resultados de Convergencia para Desarrollo en Series de Fourier

Antes de aplicar el método de separación de variables a la ecuación de calor unidimensional, veamos algunos resultados referentes a las series de Fourier. Estas series, aunque ya fueron utilizadas por

J. Bernoulli y L. Euler para el análisis del problema de la cuerda vibrante, deben su nombre a J. Fourier, que en su teoría "*Théorie Analytique de le Chauler*"(1822) las introdujo para el estudio de problemas de difusión del calor.

En primer lugar, recordemos que el conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx), \dots \right\} \quad n \geq 1 \quad (2.12)$$

constituyen una base ortonormal de $L^2(-\pi, \pi)$, luego se cumple que $\forall f \in L^2(-\pi, \pi)$, si denotamos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad n \geq 0 \quad (2.13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt \quad n \geq 1 \quad (2.14)$$

entonces la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \quad (2.15)$$

se denomina serie de Fourier de f respecto a la base dada por (2.12), converge a f en $L^2(-\pi, \pi)$, es decir que, si por cada entero $m \geq 1$ denotamos por S_m (suma parcial) a la función

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

se cumple

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_m(x)|^2 dx = 0$$

decimos que f converge en media cuadrática.

Dado ahora un intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mediante un cambio de variables

$$x = \frac{2\pi(s-a)}{(b-a)} - \pi$$

que transforma de manera biyectiva $[a, b]$ en $[-\pi, \pi]$, es posible obtener una base ortonormal numerable de $L^2(a, b)$ a partir de (2.12). La cual podemos denotar

$$\left. \begin{aligned} \varphi(s) &= \cos \left(n \left(\frac{2\pi(s-a)}{b-a} - \pi \right) \right) & \forall n \geq 0 \\ \psi(s) &= \operatorname{sen} \left(n \left(\frac{2\pi(s-a)}{b-a} - \pi \right) \right) & \forall n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

entonces para cada $f \in L^2(a, b)$ la serie

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \varphi_n(s) + B_n \psi_n(s)) \quad (2.17)$$

con

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\sigma) \varphi_n(\sigma) d\sigma & \forall n \geq 0 \\ B_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\sigma) \psi_n(\sigma) d\sigma & \forall n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

converge a $f \in L^2(a, b)$ y A_n, B_n vienen dadas por (2.18), entonces se satisface la identidad de Parseval

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(s) ds = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \quad (2.19)$$

en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) < +\infty$, y en particular $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$

Observación 2.5.1. En el caso particular en que $[a, b] = [-l, l]$ con $l > 0$ las expresiones (2.17) y (2.18) adoptan la forma

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi s}{l}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) \right) \quad (2.20)$$

y

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\sigma) \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{l}\right) d\sigma & \forall n \geq 0 \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\sigma) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\sigma}{l}\right) d\sigma & \forall n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Con la serie (2.20) convergente a f en $L^2(-l, l)$.

Si $f \in L^2(-l, l)$ y es una función par, es decir, si $f(-s) = f(s)$ en casi todo punto en $(-l, l)$, entonces $B_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Análogamente, si $f \in L^2(-l, l)$ es una función impar, es decir, si $f(-s) = -f(s)$ en casi todo punto (ctp) de $(-l, l)$ entonces $A_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Luego, dada una función $f \in L^2(0, l)$ considerando f_{impar} , la prolongación impar de f a $(-l, l)$, y f_{par} , la prolongación par de f a $(-l, l)$, podemos hablar de desarrollo en senos o en cosenos de f . Es decir, si $f \in L^2(0, l)$ y denotamos

$$\left. \begin{aligned} A_n^* &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\sigma) \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{l}\right) d\sigma & \forall n \geq 0 \\ B_n^* &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\sigma) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\sigma}{l}\right) d\sigma & \forall n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

entonces las series

$$\frac{A_0^*}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos\left(\frac{n\pi s}{l}\right) \quad (2.23)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) \quad (2.24)$$

convergen ambas a f en $L^2(0, l)$ ya que la serie definida por (2.23) converge a f_{par} , y la serie definida por (2.24) converge a f_{impar} , en ambos casos en $L^2(-l, l)$.

Volviendo al caso general de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, damos a continuación un criterio sencillo que garantiza la convergencia absoluta y uniforme, en todo $[a, b]$, de la serie (2.17) a f .

Teorema 2.5.1. *Sea $f \in C^0[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$, y supongamos que existe una función $g \in L^2(a, b)$ tal que*

$$f(s) = f(a) + \int_a^s g(\sigma) d\sigma \quad \forall s \in [a, b] \quad (2.25)$$

bajo estas condiciones, la serie de Fourier dada por (2.17) converge absoluta y uniformemente a f en el intervalo $[a, b]$.

Demostración. Sea f que cumple las condiciones del teorema. Basta con demostrar que la serie (2.17) converge absoluta y uniformemente en el intervalo $[a, b]$, ya que en tal caso (2.17) converge en $C^0[a, b]$ a una función \tilde{f} , pero como la convergencia de sucesiones en $C^0[a, b]$ implica la convergencia en $L^2(a, b)$, forzosamente $\tilde{f} \equiv f$.

Para demostrar que la serie (2.17) converge absoluta y uniformemente en el intervalo $[a, b]$, de acuerdo con el criterio M de Weierstrass y teniendo en cuenta que para todo $n \geq 1$ se satisface que $|A_n \varphi_n(s) + B_n \psi_n(s)| \leq |A_n| + |B_n|$, basta demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) < +\infty \quad (2.26)$$

con A_n y B_n dadas por (2.18).

Para comprobar (2.26) denotamos A'_n y B'_n los coeficientes del desarrollo (2.17) correspondiente a la función g que aparecen en la hipótesis (2.25), es decir

$$\left. \begin{aligned} A'_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b g(\sigma) \varphi_n(\sigma) d\sigma & \forall n \geq 0 \\ B'_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b g(\sigma) \psi_n(\sigma) d\sigma & \forall n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

por la identidad de Parseval, se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A'_n|^2 + |B'_n|^2) < +\infty \quad (2.28)$$

como $f(a) = f(b)$, se satisface que

$$\int_a^b g(\sigma) d\sigma = 0 \quad (2.29)$$

para cada $n \geq 1$ tenemos

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\sigma) \varphi_n(\sigma) d\sigma = \frac{2}{b-a} \int_a^b \left(f(a) + \int_a^\sigma g(\tau) d\tau \right) \varphi_n(\sigma) d\sigma$$

y por la definición de φ_n dicha función tiene integral cero en $[a, b]$. Se obtiene que

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^\sigma g(\tau) d\tau \right) \varphi_n(\sigma) d\sigma$$

Aplicando el teorema de Fubini a la expresión obtenida, se tiene

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \left(\int_\tau^b \varphi_n(\sigma) d\sigma \right) g(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

teniendo en cuenta que

$$\int_\tau^b \varphi_n(\sigma) d\sigma = \left[\frac{b-a}{2\pi n} \psi_n(\sigma) \right]_{\sigma=\tau}^{\sigma=b}$$

y $\psi_n(b) = 0$, es inmediato que (2.30) nos da

$$A_n = -\frac{b-a}{2\pi n} B'_n, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.31)$$

Análogamente obtenemos que

$$B_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \left(\int_\tau^b \psi_n(\sigma) d\sigma \right) g(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

como

$$\int_\tau^b \psi_n(\sigma) d\sigma = \left[-\frac{b-a}{2\pi n} \varphi_n(\sigma) \right]_{\sigma=\tau}^{\sigma=b}$$

y teniendo en cuenta (2.29), de (2.32) se obtiene

$$B_n = \frac{b-a}{2\pi n} A'_n, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.33)$$

como consecuencia de (2.31) y (2.33), se tiene para cada $n \geq 1$

$$\left. \begin{aligned} |A_n| &= \frac{b-a}{2\pi} \frac{1}{n} |B'_n| \leq \frac{b-a}{4\pi} \left(\frac{1}{n^2} + (B'_n)^2 \right) \\ |B_n| &= \frac{b-a}{2\pi} \frac{1}{n} |A'_n| \leq \frac{b-a}{4\pi} \left(\frac{1}{n^2} + (A'_n)^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n|^2 + |B_n|^2) < +\infty$$

□

Observación 2.5.2. Toda $f \in C^1[a, b]$, o más generalmente toda f de clase 1 a trozos en $[a, b]$ (es decir, tal que $f \in C^0[a, b]$ y existe una partición finita $\{a = s_0 < \dots < s_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que $f \in C^1[s_i, s_{i+1}] \quad \forall i = 1 \dots n$) satisfacen las hipótesis de (2.25) del teorema.

La función g en (2.25) es la derivada en casi todo punto de f . La condición (2.25) impuesta sobre f en el teorema se traduce, en el lenguaje de los espacios de Sobolev a que $f \in H^1(a, b)$

Observación 2.5.3. Es fácil obtener, como consecuencia del teorema (2.5.1), el siguiente teorema.

Teorema 2.5.2. Sea $f \in C^0[0, l]$ tal que existe una función $g \in L^2(0, 1)$ que cumple

$$f(s) = f(0) + \int_0^s g(\sigma) d\sigma \quad \forall s \in [0, l] \quad (2.35)$$

bajo estas condiciones, se tiene:

- a) El desarrollo en cosenos de f determinado por (2.23) converge absoluta y uniformemente a f en el intervalo $[0, l]$.
- b) Si además $f(0) = f(l) = 0$ entonces el desarrollo en senos de f determinado por (2.24) también converge absoluta y uniformemente a f en el intervalo $[0, l]$.

Demostración. Si consideramos

$$f_{par}(s) = \begin{cases} f(s) & \text{si } s \in [0, l] \\ f(-s) & \text{si } s \in [-l, 0] \end{cases}$$

la prolongación par de f a $[-l, l]$, es inmediato que $f_{par} \in C^0[-l, l]$ y que $f_{par}(-l) = f_{par}(l)$. Además, es sencillo comprobar a partir de (2.35), que para todo $s \in [-l, l]$ se cumple que

$$f_{par}(s) = f_{par}(-l) + \int_{-l}^s g_{impar}(\tau) d\tau$$

con g_{impar} la prolongación impar de g a $(-l, l)$, función que pertenece a $L^2(-l, l)$. En consecuencia, por el teorema anterior el desarrollo en serie de Fourier de f_{par} en $(-l, l)$ converge absoluta y uniformemente a f_{par} en $[-l, l]$, con lo que, en particular el desarrollo en cosenos de f determinado por (2.23), converge absoluta y uniformemente a f en el intervalo $[0, l]$.

Análogamente si consideramos

$$f_{impar}(s) = \begin{cases} f(s) & \text{si } s \in [0, l] \\ -f(-s) & \text{si } s \in [-l, 0] \end{cases}$$

la prolongación impar de f a $[-l, l]$, es inmediato que, si $f(0) = 0$, entonces $f_{impar} \in C^0[-l, l]$ y que, si $f(l) = 0$, entonces $f_{impar}(-l) = f_{impar}(l)$. Además, es sencillo comprobar a partir de (2.35), que si $f(0) = f(l) = 0$, $\forall s \in [-l, l]$ se cumple

$$f_{impar}(s) = f_{impar}(-l) + \int_{-l}^s g_{par}(\tau) d\tau$$

con g_{par} la prolongación par de g a $(-l, l)$, función que pertenece a $L^2(-l, l)$. En consecuencia, en esas circunstancias, por el teorema anterior el desarrollo en serie de Fourier de f_{impar} en $(-l, l)$ converge absoluta y uniformemente a f_{impar} en $[-l, l]$, con lo que, en particular el desarrollo en senos de f determinado por (2.24), converge absoluta y uniformemente a f en el intervalo $[0, l]$. \square

2.6. Aplicación del método de separación de variables a la ecuación del calor unidimensional.

Consideremos el problema mixto de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor unidimensional homogénea

$$\left. \begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{en } (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{en } (0, l) \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0 && \text{en } t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

donde $l \in (0, +\infty)$ y $u_0 : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ están dados.

Aplicando separación de variables, se busca en primer lugar soluciones no nulas de la ecuación del calor homogénea que son de la forma $X(x)T(t)$, y tales que $X(0) = X(l) = 0$. Ello conduce a la ecuación $\dot{T} = \lambda T$, y al problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} X'' &= \lambda X \\ X(0) &= X(l) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Para que el problema de contorno posea solución no nula, es inmediato deducir que λ ha de ser de la forma $\lambda_n = -(\frac{n\pi}{l})^2$, $n = 1, 2, \dots$, con $X_n(x) = \text{sen}(\frac{n\pi x}{l})$. Para cada uno de los λ_n , la solución general de $\dot{T} = \lambda_n T$ viene dada por $T_n(t) = c_n e^{-(n\pi/l)^2 t}$, y en consecuencia se busca una solución de (2.36) de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi/l)^2 t} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.37)$$

para la determinación de los c_n , partiendo de la condición $u(x, 0) = u_0(x)$, y suponiendo que $u_0 \in L^2(0, l)$, se tiene

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(s) \text{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds \quad \forall n \geq 1 \quad (2.38)$$

Es decir, los c_n son los coeficientes del desarrollo en serie de senos en $(0, l)$ de la función u_0 . De hecho para el problema (2.36) se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.6.1. *Si $u_0 \in L^2(0, l)$, la igualdad (2.37), con los coeficientes c_n dadas por (2.38), define una función $u = u(x, t)$ tal que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, y es solución del problema (2.36) en el sentido de que satisface la ecuación $u_t - u_{xx} = 0$ en cada punto de $[0, l] \times (0, +\infty)$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$ para todo $t > 0$, y*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0, l)} = 0 \quad (2.39)$$

Además, si $u_0 \in C^0([0, l])$, $u_0(0) = u_0(l) = 0$, y existe $v_0 \in L^2(0, l)$ tal que

$$u_0(x) = \int_0^x v_0(s) ds \quad \forall x \in [0, l]$$

entonces

$$u \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \quad (2.40)$$

y, en particular, $u(x, 0) = u_0(x)$ para todo $x \in [0, l]$.

Demostración. Sea $u_0 \in L^2(0, l)$. Fijado $\varepsilon > 0$, si $t \geq \varepsilon$ entonces

$$\left| c_n e^{-(n\pi/l)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right| \leq |c_n| e^{-(n\pi/l)^2 \varepsilon} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

como $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, es inmediato de la desigualdad anterior que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| c_n e^{-(n\pi/l)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right| \leq C e^{-(n\pi/l)^2 \varepsilon} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty) \quad \forall n \geq 1. \quad (2.41)$$

De manera análoga, se puede comprobar que cualquier derivada parcial de un término genérico de los que constituyen la serie que define a u admite una cota similar, en concreto, dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, existe una constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial t^{\alpha_2}} \left(c_n e^{-(n\pi/l)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \right| \leq C_\alpha n^{\alpha_1 + 2\alpha_2} e^{-(n\pi/l)^2 \varepsilon} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty) \quad \forall n \geq 1. \quad (2.42)$$

estas desigualdades, junto con el criterio M de Weierstrass, implican, teniendo en cuenta que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha_1 + 2\alpha_2} e^{-(n\pi/l)^2 \varepsilon} < +\infty$$

que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty))$ para todo $\varepsilon > 0$, y en consecuencia $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

Con esto, por construcción, es inmediato que $u_t - u_{xx} = 0$ en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, y $u(0, t) = u(l, t) = 0$ para todo $t > 0$.

Para demostrar (2.39), denotemos para cada entero $m \geq 1$ y cada $t \geq 0$ por $s_m(t)$ a la función de la variable x definida por

$$s_m(t)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi/l)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

por construcción,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|s_m(0) - u_0\|_{L^2(0, l)} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|s_m(t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(0, l)} = 0 \quad \forall t > 0$$

consideremos fijado $\varepsilon > 0$. Tomemos un entero $m_\varepsilon \geq 1$ tal que $\|s_{m_\varepsilon}(0) - u_0\|_{L^2(0, l)} \leq \varepsilon$. De esta forma, tenemos

$$\|s_{m_\varepsilon}(0) - u_0\|_{L^2(0, l)}^2 = \left\| \sum_{n=m_\varepsilon+1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\|_{L^2(0, l)}^2 = \frac{l}{2} \sum_{n=m_\varepsilon+1}^{\infty} c_n^2 \leq \varepsilon^2$$

y por tanto,

$$\|s_{m_\varepsilon}(t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(0, l)}^2 = \left\| \sum_{n=m_\varepsilon+1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi/l)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\|_{L^2(0, l)}^2 = \frac{l}{2} \sum_{n=m_\varepsilon+1}^{\infty} c_n^2 e^{-2(n\pi/l)^2 t} \leq \varepsilon^2 \quad \forall t > 0$$

en consecuencia, obtenemos

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0, l)} \leq \|u(\cdot, t) - s_{m_\varepsilon}(t)\|_{L^2(0, l)} + \|s_{m_\varepsilon}(t) - s_{m_\varepsilon}(0)\|_{L^2(0, l)} + \|s_{m_\varepsilon}(0) - u_0\|_{L^2(0, l)}$$

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0,l)} \leq 2\varepsilon + \|s_{m_\varepsilon}(t) - s_{m_\varepsilon}(0)\|_{L^2(0,l)} \quad \forall t > 0. \quad (2.43)$$

pero

$$\|s_{m_\varepsilon}(t) - s_{m_\varepsilon}(0)\|_{L^2(0,l)}^2 = \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} \left\| c_n \left(e^{-(n\pi/l)^2 t} - 1 \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right\|_{L^2(0,l)}^2 = \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} c_n^2 \left(e^{-(n\pi/l)^2 t} - 1 \right)^2 \quad \forall t > 0$$

con lo que, denotando $d = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty$, resulta

$$\|s_{m_\varepsilon}(t) - s_{m_\varepsilon}(0)\|_{L^2(0,l)}^2 \leq \frac{dl}{2} \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} \left(e^{-(n\pi/l)^2 t} - 1 \right)^2 \quad \forall t > 0 \quad (2.44)$$

de las desigualdades (2.43) y (2.44), haciendo $t \rightarrow 0$, se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0,l)} \leq 2\varepsilon. \quad (2.45)$$

Basta ahora tener en cuenta que se cumple para todo $\varepsilon > 0$ en la desigualdad (2.45), con lo que se obtiene (2.39).

Finalmente, si $u_0 \in C^0([0, l])$, $u_0(0) = u_0(l) = 0$, y existe $u_0 \in L^2(0, l)$ tal que

$$u_0(x) = \int_0^x v_0(s) ds \quad \forall x \in [0, l]$$

entonces los c_n vienen dados por

$$c_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^l v_0(s) \cos \left(\frac{n\pi s}{l} \right) ds$$

y en consecuencia

$$|c_n| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} + \left(\int_0^l v_0(s) \cos \left(\frac{n\pi s}{l} \right) ds \right)^2 \right) \quad \forall n \geq 1 \quad (2.46)$$

dado que

$$\left| c_n e^{-(n\pi/l)^2 t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right| \leq |c_n| \quad \forall t \geq 0$$

de (2.46) se obtiene de manera inmediata (2.40). \square

Observación 2.6.1. Es fácil comprobar que si $u_0 \in C^2([0, l])$, $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0$, y existe $v_0 \in L^2(0, l)$ tal que

$$u_0''(x) = \int_0^x v_0(s) ds \quad \forall x \in [0, l]$$

entonces la solución u del problema (2.36) definida por (2.37) y (2.38) satisface

$$u_t, u_{xx} \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty)). \quad (2.47)$$

Observación 2.6.2. Aunque el dato inicial u_0 sea irregular, la solución u del problema (2.36) definida por (2.37) y (2.38) pertenece a $C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$. En consecuencia en este sentido, se dice que la ecuación del calor posee un *efecto regularizante*. Tal efecto diferencia a la ecuación del calor de la de ondas; de hecho, la primera describe fenómenos irreversibles en el tiempo, mientras que en la ecuación de ondas el cambio t por $-t$ no altera la ecuación.

Observase también que, de la expresión de u , si $t > \varepsilon > 0$ entonces

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq \sqrt{d} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi/l)^2 t} - \sqrt{d} e^{-(\pi/l)^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\pi/l)^2 (1-n^2)t} \\ &\leq \sqrt{d} e^{-(\pi/l)^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\pi/l)^2 (1-n^2)\varepsilon} \leq C_\varepsilon e^{-(\pi/l)^2 t} \end{aligned}$$

y por consiguiente, $|u(t, x)|$ decae a cero cuando $t \rightarrow +\infty$ de manera exponencial uniformemente en la variable x . Es decir, el calor se difunde y la temperatura decae exponencialmente a cero cuando el tiempo tiende al infinito.

Observación 2.6.3. Junto al resultado de existencia de solución para el problema (2.36) que supone el teorema (2.6.1), también se puede obtener el siguiente resultado de unicidad:

Teorema 2.6.2. Sea $u \in C^0([0, l] \times (0, +\infty))$ tal que existen las derivadas parciales u_t , u_x y u_{xx} y también pertenecen a $C^0([0, l] \times (0, +\infty))$. Supongamos que $u_t = u_{xx}$ en $[0, l] \times (0, +\infty)$, que $u(0, t) = u(l, t) = 0$ para todo $t > 0$, y que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(0, l)} = 0$$

Bajo las condiciones precedentes, forzosamente $u \equiv 0$ en $[0, l] \times (0, +\infty)$.

Demostración. Consideremos la función $E(t)$ definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx \quad \forall t > 0.$$

derivando $E(t)$ se puede ver que la función es no creciente luego es idénticamente nula. \square

Observación 2.6.4. Es posible analizar también por el método de separación de variables un problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor unidimensional no homogénea de la forma

$$\left. \begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x, t) && \text{en } (0, l) \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{en } (0, l) \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0 && \text{en } (0, T) \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

en este caso, se busca solución de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

En particular, si se pretende resolver un problema con condiciones no homogéneas de la forma

$$\left. \begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{en } (0, l) \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{en } (0, l) \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t) && \text{en } (0, T) \end{aligned} \right\}$$

basta hacer el cambio de función incógnita

$$v(x, t) = u(x, t) - \alpha(t) - \frac{x}{l}(\beta(t) - \alpha(t))$$

para obtener un problema de la forma (2.48) en la incógnita v .

Observación 2.6.5. En la práctica también se usa el método de separación de variables para la resolución de algunos problemas de contorno o mixtos referentes a, entre otras, las ecuaciones de Laplace bidimensional y de ondas unidimensional.

2.7. Solución clásica de los problemas de Cauchy y de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de ondas unidimensional homogénea

Hasta ahora, hemos hecho el uso del método de separación de variables para analizar un ejemplo de problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de ondas unidimensional. En dicho ejemplo, obteníamos una solución que no era C^2 en todo el dominio de definición del problema. Ahora, en este párrafo, nos vamos a restringir el estudio de la existencia y unicidad de soluciones clásicas de los problemas, es decir C^2 en todo el dominio de definición del problema.

En primer lugar, consideramos el problema de Cauchy (o de valores iniciales) para la ecuación de ondas unidimensional homogénea:

$$(PCO_h) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $c > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son datos del problema (a partir de ahora, cambiamos la notación que hemos empleado, sustituyendo u_0 por f , y u_1 por g).

Definición 2.7.1. Una solución clásica de (PCO_h) es cualquier función $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $u(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $u_t(x, 0) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Es evidente que para que exista solución clásica de (PCO_h) es necesario que $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$. De hecho, estas dos condiciones son también suficientes, ya que se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.7.1. Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$, el problema (PCO_h) posee una y sólo una solución clásica u , que viene determinada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.49)$$

La igualdad (2.49) se denomina fórmula de D'Alembert.

Demostración. Considerando el cambio de variables independientes determinado por $\xi = x + ct$ y $\eta = x - ct$, es inmediato comprobar que $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ satisface $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en \mathbb{R}^2 , si y sólo si, la función $v = v(\xi, \eta)$, definida por

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right),$$

satisface la ecuación $v_{\xi\eta} = 0$ en todo \mathbb{R}^2 . En consecuencia, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ satisface $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en \mathbb{R}^2 si y solo si es de la forma

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.50)$$

con F y G funciones de $C^2(\mathbb{R})$.

Evidentemente, la función u dada por (2.49) pertenece a $C^2(\mathbb{R}^2)$ y es de la forma (2.50). Además, es inmediato comprobar que satisface las condiciones de iniciales en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Para terminar con la demostración del teorema, basta comprobar que la función u dada por (2.49) es la única de la forma (2.50) que satisface las condiciones iniciales en todo punto x de \mathbb{R} .

En efecto, si u es una función de la forma (2.50), con F y G funciones de $C^2(\mathbb{R})$, y $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = g(x)$ en todo punto x de \mathbb{R} , entonces

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) & \text{en } \forall x \in \mathbb{R} \\ F'(x) - G'(x) = \frac{1}{c}g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

así pues, se ha de satisfacer

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left(f'(x) + \frac{1}{c}g(x) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con lo que F ha de ser de la forma

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con $k \in \mathbb{R}$, y por lo tanto G tiene la forma

$$G(x) = f(x) - F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds - k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

llevando a (2.50) las expresiones obtenidas para F y G , obtenemos (2.49) □

Observación 2.7.1. La fórmula de D'Alembert nos indica que la ecuación de ondas unidimensional no mejora la regularidad de los datos iniciales f y g , es decir, no posee el efecto regularizante de la ecuación de calor unidimensional. Lo único que se puede afirmar sobre la solución clásica de (PCO_h) es que, para todo entero $m \geq 2$, si $f \in C^m(\mathbb{R})$ y $g \in C^{m-1}(\mathbb{R})$, entonces $u \in C^m(\mathbb{R}^2)$

Observación 2.7.2. El problema (PCO_h) posee la propiedad de dependencia continua, en el sentido de la convergencia uniforme sobre compactos, respecto de los datos iniciales.

En concreto, si f y \bar{f} pertenecen a $C^2(\mathbb{R})$, g y \bar{g} pertenecen a $C^1(\mathbb{R})$, y existe un intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $f \equiv \bar{f}$ y $g \equiv \bar{g}$ en $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, entonces, si denotamos por u a la solución de (PCO_h) correspondiente a los datos iniciales f y g , y por \bar{u} a la solución de (PCO_h) correspondiente a los datos iniciales \bar{f} y \bar{g} , se satisface:

$$|u(x, t) - \bar{u}(x, t)| \leq \|f - \bar{f}\|_{C^0([a, b])} + \frac{b-a}{2c} \|g - \bar{g}\|_{C^0([a, b])} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.51)$$

Observación 2.7.3. Sea (x_*, t_*) un punto de \mathbb{R}^2 dado tal que, por fijar ideas, $t_* > 0$. Teniendo en cuenta la fórmula (2.49), podemos afirmar sobre la solución u de (PCO_h) :

a) El valor de u en el punto (x_*, t_*) depende, exclusivamente, del valor de f en los puntos $x_* + ct_*$ y $x_* - ct_*$, y de los valores que toma g en los puntos del intervalo $[x_* - ct_*, x_* + ct_*]$. A dicho intervalo se le denomina el intervalo de dependencia del punto (x_*, t_*) para $t = 0$.

b) Los valores de f y g en x_* influyen en el instante t_* únicamente en los valores de u en los puntos (x, t_*) con $x \in [x_* - ct_*, x_* + ct_*]$. Al intervalo trasladado de éste último a $t = t_*$ se le denomina el intervalo de influencia del punto $(x_*, 0)$ en el instante $t = t_*$.

Pasamos ahora a estudiar el problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de ondas unidimensionales homogénea. En concreto, consideramos el problema

$$(PCDO_h) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } [0, l] \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) & \text{si } x \in [0, l] \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t) & \text{si } t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

donde $c > 0$, $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son datos del problema. El problema $(PCDO_h)$ se denomina también el problema de la cuerda vibrante. Para dicho problema, introduciremos el siguiente concepto de solución:

Definición 2.7.2. Una solución clásica de $(PCDO_h)$ es cualquier función $u = u(x, t)$ que pertenezca a $C^2([0, l] \times [0, +\infty))$, y tal que $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$, para todo $(x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$, $u(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in [0, l]$, $u_t(x, 0) = g(x)$ para todo $x \in [0, l]$, $u(0, t) = \alpha(t)$ y $u(l, t) = \beta(t)$ para todo $t \geq 0$.

En primer lugar, es fácil establecer la unicidad de solución clásica para el problema $(PCDO_h)$.

Lema 2.7.2. *Existe, a lo sumo, una solución clásica para el problema $(PCDO_h)$.*

Demostración. Basta ver que si u es clásica para el problema $(PCDO_h)$ con $f \equiv g \equiv \alpha \equiv \beta \equiv 0$, entonces $u \equiv 0$ en $[0, l] \times [0, +\infty)$.

Para demostrar esto último, se considera la función $E(t)$ definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (c^2 (u_x(x, t))^2 + (u_t(x, t))^2) dx \quad \forall t > 0 \quad (2.52)$$

Donde $E(0) = 0$, y que $E \in C^1([0, +\infty))$ con derivada

$$E'(t) = \int_0^l (c^2 u_x(x, t) u_{xt}(x, t) + u_t(x, t) u_{tt}(x, t)) dx \quad \forall t > 0$$

de la cual por ser $E(t)$ solución del $(PCDO_h)$ debe cumplir que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ luego obtenemos

$$E'(t) = \int_0^l c^2 u_x(x, t) u_{xt}(x, t) + u_t(x, t) c^2 u_{xx}(x, t) dx \quad \forall t > 0$$

acomodando términos y usando la definición de la derivada del producto de funciones se sigue que

$$E'(t) = c^2 \int_0^l (u_x u_t)_x(x, t) dx = c^2 [u_x(x, t) u_t(x, t)]_{x=0}^{x=l} = 0 \quad \forall t > 0$$

luego, $E(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, y por lo tanto u es constante en $[0, l] \times [0, +\infty)$, con lo que forzosamente $u = 0$ en el $[0, l] \times [0, +\infty)$ \square

Respecto de la existencia, resulta inmediato que, si existe solución clásica para el problema $(PCDO_h)$, entonces los datos iniciales y de contorno deben de satisfacer que tanto $f \in C^2([0, l])$, $g \in C^1([0, l])$, como $\alpha \in C^2([0, +\infty))$ y $\beta \in C^2([0, +\infty))$. Además, se puede comprobar que se han de satisfacer las siguientes relaciones:

$$(CC) \begin{cases} \alpha(0) = f(0), & \dot{\alpha}(0) = g(0), & \ddot{\alpha}(0) = c^2 f''(0) \\ \beta(0) = f(l), & \dot{\beta}(0) = g(l), & \ddot{\beta}(0) = c^2 f''(l) \end{cases}$$

denominadas relaciones o condiciones de compatibilidad para los datos del problema $(PCDO_h)$. De hecho, estas condiciones son también suficientes para la existencia de solución clásica del problema $(PCDO_h)$. Luego podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.7.3. *Si $f \in C^2([0, l])$, $g \in C^1([0, l])$, $\alpha \in C^2([0, +\infty])$, $\beta \in C^2([0, +\infty])$, y se satisfacen las condiciones (CC) , entonces existe una y sólo una solución clásica del problema $(PCDO_h)$.*

Antes de demostrar el teorema (2.7.3), hagamos algunos comentarios.

En primer lugar, teniendo en cuenta el lema 2.7, está claro que para el teorema 2.7.3 lo que hace falta es demostrar la existencia de solución.

En el caso en que α y β son funciones afines, es decir de la forma $\alpha(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t$ y $\beta(t) = \beta_1 + \beta_2 t$, con α_i y $\beta_i \in \mathbb{R}$ la demostración de la existencia de solución clásica del problema $(PCDO_h)$ se puede llevar a cabo, de una forma relativamente sencilla, mediante el método de separación de variables. En efecto, en el caso de condiciones de contorno afines, efectuando el cambio de función incógnita

$$v(x, t) = u(x, t) - \alpha(t) - \frac{x}{l}(\beta(t) - \alpha(t))$$

la cuestión se reduce a demostrar la existencia de solución clásica del problema

$$\left. \begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0 && \text{en } [0, l] \times (0, +\infty) \\ v(x, 0) = \hat{f}(x), \quad v_t(x, 0) &= \hat{g}(x) && \text{si } x \in [0, l] \\ v(0, t) = v(l, t) &= 0 && \text{si } t \in [0, +\infty) \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

donde

$$\hat{f}(x) = f(x) - \alpha(0) - \frac{x}{l}(\beta(0) - \alpha(0))$$

y

$$\hat{g}(x) = g(x) - \dot{\alpha}(0) - \frac{x}{l}(\dot{\beta}(0) - \dot{\alpha}(0))$$

luego se satisfacen las condiciones (CC) , es inmediato comprobar que $\hat{f} \in C^2([0, l])$, $\hat{g} \in C^1([0, l])$, y satisfacen

$$\hat{f}(0) = \hat{f}(l) = \hat{f}''(0) = \hat{f}''(l) = \hat{g}(0) = \hat{g}(l) = 0$$

en resumen, si α y β son funciones afines, para demostrar el teorema 2.7.3 basta mostrar existencia de solución clásica de los problemas

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{en } [0, l] \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) &= 0 && \text{si } x \in [0, l] \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0 && \text{si } t \in [0, +\infty) \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

y

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{en } [0, l] \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = g(x) && \text{si } x \in [0, l] \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0 && \text{si } t \in [0, +\infty) \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

donde en (2.54) $f \in C^2([0, l])$ y satisface $f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0$, y en (2.55) $g \in C^1([0, l])$, y satisface $g(0) = g(l) = 0$. Para demostrar que (2.54) posee solución clásica, se procede por separación de variables, y se obtiene como solución formal

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.56)$$

con

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds \quad \forall n \geq 1$$

consideremos la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

la función F así definida no es más que la resultante de prolongar f de manera impar a $[-l, l]$, y a continuación considerar la prolongación de esta última a todo \mathbb{R} por periodicidad $2l$, es decir, se toma \tilde{f} definida en $[-l, l]$ por

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \text{en } y \in [0, l] \\ -f(-y) & y \in [-l, 0) \end{cases}$$

y se define F por

$$F(y + 2kl) = \tilde{f}(y) \quad \forall y \in [-l, l] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

como $f \in C^2([0, l])$ y satisface $f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0$, es fácil comprobar que $F \in C^2(\mathbb{R})$. Basta ahora observar que

$$\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x+ct)}{l}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x-ct)}{l}\right) \right]$$

para concluir que la función definida por (2.56) viene dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (F(x+ct) + F(x-ct)) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

con lo que es inmediato ver que u es solución clásica de (2.54).

Para la existencia de solución clásica de (2.55), procediendo de nuevo por separación de variables, se obtiene como solución formal

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.57)$$

con

$$c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds \quad \forall n \geq 1$$

luego de manera formal,

$$u_t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.58)$$

con

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds \quad \forall n \geq 1$$

como $g \in C^1([0, l])$ y $g(0) = g(l) = 0$, la serie definida en (2.58) converge absoluta y uniformemente en \mathbb{R}^2 .

Definamos

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (2.59)$$

La función G definida por (2.59) no es más que la resultante de prolongar g de manera impar a $[-l, l]$, y a continuación considerar la prolongación de esta última a todo \mathbb{R} con periodicidad $2l$. En consecuencia, como $g \in C^1[0, l]$ con $g(0) = g(l) = 0$, es fácil ver que $G \in C^1(\mathbb{R})$.

La igualdad formal (2.58) puede ser escrita como

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2}[G(x + ct) + G(x - ct)] \quad (2.60)$$

que integrada con $u(x, 0) = 0$ produce

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t G(x + cs) ds + \frac{1}{2} \int_0^t G(x - cs) ds$$

ó haciendo el cambio $x + cs = \tau$ en la primera integral y $x - cs = \tau$ en la segunda integral,

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau) d\tau \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.61)$$

es sencillo comprobar que la función u definida por (2.61) es solución clásica del problema (2.55).

Observación 2.7.4. De la discusión precedente, se deduce que para resolver el problema $(PCDO_h)$ en el caso de condiciones de contorno homogéneas, y supuestas satisfechas las condiciones (CC) , lo que hay que hacer, es considerar las prolongaciones impares de periodicidad $2l$ de f y g a todo \mathbb{R} , y a continuación resolver por la formula de D'Alembert el problema de Cauchy correspondiente.

Finalmente ahora demostraremos el teorema 2.7.3 en el caso general.

Demostración. Demostración del Teorema 2.7.3

En primer lugar, es inmediato que toda función de la forma

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty) \quad (2.62)$$

con $F \in C^2([0, +\infty))$ y $G \in C^2((-\infty, l])$, es una función que pertenece a $C^2([0, l] \times [0, +\infty))$ y satisface la ecuación $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en todo punto de $[0, l] \times [0, +\infty)$.

Lo que hay que comprobar, es que es posible hallar $F \in C^2([0, +\infty))$ y $G \in C^2((-\infty, l])$, tales que la función u determinada por (2.62) satisfaga las condiciones iniciales y de contorno en $(PCDO_h)$.

En primer lugar, para que u determinada por (2.62) satisfaga las condiciones iniciales en $(PCDO_h)$, es necesario y suficiente que F y G satisfagan

$$\begin{cases} F(\xi) + G(\xi) = f(\xi) & \forall \xi \in [0, l] \\ F'(\xi) - G''(\xi) = \frac{1}{c}g(\xi) & \forall \xi \in [0, l] \end{cases}$$

luego, para la obtención de la forma de D'Alambert, es inmediato que para que u determinada por (2.62) satisfaga las condiciones iniciales en $(PCDO_h)$, es suficiente que F y G vengan dadas por

$$F(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s)ds \quad \forall \xi \in [0, l] \quad (2.63)$$

$$G(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) - \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s)ds \quad \forall \xi \in [0, l] \quad (2.64)$$

Por otra parte, la función u determinada por (2.62) satisface la condición de contorno $u(0, t) = \alpha(t)$, si y sólo si F y G satisfacen la relación

$$F(ct) + G(-ct) = \alpha(t) \quad \forall t \geq 0$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si

$$G(\xi) = \alpha\left(\frac{-\xi}{c}\right) - F(-\xi) \quad \forall \xi \leq 0 \quad (2.65)$$

finalmente, la función u determinada por (2.62) satisface la condición de contorno $u(l, t) = \beta(t)$, si y sólo si F y G satisfacen la relación

$$F(l + ct) + G(l - ct) = \beta(t) \quad \forall t \geq 0$$

es decir, si y sólo si

$$F(\xi) = \beta\left(\frac{\xi - l}{c}\right) - G(2l - \xi) \quad \forall \xi \geq 1 \quad (2.66)$$

luego para terminar la demostración del teorema 2.7.3, basta comprobar que, supuestas satisfechas las condiciones (CC), existen $F \in C^2([0, +\infty))$ y $G \in C^2((-\infty, l])$, cumpliendo las condiciones (2.63)-(2.66). En primer lugar, es inmediato que, las cuatro relaciones (2.63)-(2.66) determinan una y sólo una pareja de funciones $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $G : (-\infty, l] \rightarrow \mathbb{R}$. Además, como $f \in C^2([0, l])$ y $g \in C^1([0, l])$, es inmediato que F y G son de $C^2([0, l])$.

Por otra parte, de (2.63)-(2.65), tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} \forall \xi \in [0, l] \quad \frac{1}{2}f(\xi) - \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s)ds \\ \forall \xi \in [-l, 0] \quad \alpha\left(\frac{-\xi}{c}\right) - \frac{1}{2}f(-\xi) - \frac{1}{2c} \int_0^{-\xi} g(s)ds \end{array} \right\} = G(\xi) \quad (2.67)$$

También, de (2.63), (2.64) y (2.65), tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} \forall \xi \in [0, l] \quad \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s)ds \\ \forall \xi \in [l, 2l] \quad \beta\left(\frac{\xi - l}{c}\right) - \frac{1}{2}f(2l - \xi) + \frac{1}{2c} \int_0^{2l - \xi} g(s)ds \end{array} \right\} = G(\xi) \quad (2.68)$$

es fácil ahora comprobar que, por las relaciones (CC), las función G determinada por (2.67) pertenece a $C^2([-l, l])$, y la función F determinada por (2.68) pertenece a $C^2([0, 2l])$.

Para terminar con la demostración, procedamos por inducción. Supongamos que la pareja de funciones F y G determinadas por las relaciones (2.63)-(2.66) satisfacen $F \in C^2([0, (k+1)l])$ y $G \in C^2([-kl, l])$, con $k \geq 1$ entero. Vamos a demostrar que, entonces, las relaciones (2.65) y (2.66) implican que $F \in C^2([0, (k+2)l])$ y $G \in C^2([-(k+1)l, l])$.

En efecto si $F \in C^2([0, (k+1)l])$ con $k \geq 1$, como $\alpha \in C^2([0, +\infty))$, la relación (2.65) implica en particular que $G \in C^2([-(k+1)l, 0])$, lo que, junto al hecho de que ya sabemos que $G \in C^2([-l, l])$, implica que $G \in C^2([-(k+1)l, l])$.

Por otra parte, si $G \in C^2([-kl, l])$ con $k \geq 1$, como $\beta \in C^2([0, +\infty))$, la relación (2.66) implica que $F \in C^2([l, (k+2)l])$, y basta ahora tener en cuenta que ya sabemos que $C^2([0, 2l])$, para concluir que $F \in C^2([0, (k+2)l])$. \square

Observación 2.7.5. El método que hemos seguido para demostrar el teorema 2.7.3, que proporciona otro método distinto del de separación de variables para hallar la solución clásica del problema ($PCDO_h$), aunque ha sido puramente analítico, permite una interpretación geométrica evidente. Dicha interpretación se puede generalizar al caso en el que no se satisfacen las condiciones (CC). Para ello, se hace uso de la noción de solución generalizada de la ecuación de ondas unidimensional homogénea.

Definición 2.7.3. Sea $Q \subset \mathbb{R}^2$ un abierto no vacío y $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que u es una solución generalizada de la EDP $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en Q si para todo punto $(x_*, t_*) \in Q$ y todo par $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ tale que los puntos $(x_* + c\xi, t_* + \xi)$, $(x_* - c\eta, t_* + \eta)$ y $(x_* + c\xi - c\eta, t_* + \xi + \eta)$ pertenezcan a Q , se satisface la igualdad

$$u(x_*, t_*) + u(x_* + c\xi - c\eta, t_* + \xi + \eta) = u(x_* + c\xi, t_* + \xi) + u(x_* - c\eta, t_* + \eta) \quad (2.69)$$

La interpretación geométrica de la definición 2.7.3 es inmediata. Fijado un punto $A(x_*, t_*)$ en Q , se toma dos puntos, B y D , en Q , que estén en cada una de las dos rectas características que pasan por A (de ecuaciones $x - ct = x_* - ct_*$ y $x + ct = x_* + ct_*$ respectivamente). A continuación se toma como punto C aquél que junto con A, B y D determinen los vértices de un paralelogramo. Suponiendo que C pertenece también a Q , si u es solución generalizada de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en Q , se ha de satisfacer

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

la relación del concepto de solución generalizada con el de solución clásica viene dada por el resultado siguiente:

Lema 2.7.4. Sean $Q \subset \mathbb{R}^2$ un abierto no vacío y $u \in C^2(Q)$. Bajo estas condiciones, se satisfacen:

a) si $u_{tt} - c^2 u_{xx} \equiv 0$ en Q , y Q es convexo, entonces u es solución generalizada de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en Q .

b) si u es solución generalizada de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en Q , entonces $u_{tt} - c^2 u_{xx} \equiv 0$

Demostración. a) sea $u \in C^2(Q)$, con Q convexo, tal que $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en Q .

Fijados cuatro puntos $A = (x_*, t_*)$, $B = (x_* + c\xi, t_* + \xi)$, $C = (x_* + c\xi - c\eta, t_* + \xi + \eta)$ y $D = (x_* - c\eta, t_* + \eta)$, todos en Q , denotemos por R el interior del paralelogramo de vértices A, B, C y D . Como Q es convexo, la clausura de R está contenida en Q , así que podemos escribir

$$\int \int_{\mathbb{R}} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx dt = 0 \quad (2.70)$$

para obtener (2.69), basta aplicar a (2.70) la fórmula de Green.

b) Sea $u \in C^2(Q)$ solución generalizada de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en Q .

Fijemos un punto $(x^*, t^*) \in Q$. Como Q es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\xi \in (0, \varepsilon)$ y todo $\eta \in (0, \varepsilon)$ los puntos $(x_* + c\xi, t_* + \xi)$, $(x_* + c\xi - c\eta, t_* + \xi + \eta)$ y $(x_* - c\eta, t_* + \eta)$ están también todos en Q . En consecuencia, se satisface

$$u(x_* + c\xi - c\eta, t_* + \xi + \eta) - u(x_* + c\xi, t_* + \xi) = u(x_* - c\eta, t_* + \eta) - u(x_*, t_*) \quad \forall \xi, \eta \in (0, \varepsilon) \quad (2.71)$$

sumando y restando $u(x_* + c\xi, t_* + \xi)$ en el primer miembro de la igualdad (2.71), y sumando y restando $u(x_* - c\eta, t_*)$ en el segundo miembro de la misma igualdad, se obtiene luego de dividir por η y tomando límite para η tendiendo a cero,

$$u_t(x_* + c\xi, t_* + \xi) - cu_x(x_* + c\xi, t_* + \xi) = u_t(x_*, t_*) - cu_x(x_*, t_*) \quad \forall \xi \in (0, \varepsilon) \quad (2.72)$$

de (2.72) es inmediato que se tiene

$$\begin{aligned} & u_t(x_* + c\xi, t_* + \xi) - u_t(x_* + c\xi, t_*) + u_t(x_* + c\xi, t_*) - u_t(x_*, t_*) = \\ & c[u_x(x_* + c\xi, t_* + \xi) - u_x(x_*, t_* + \xi) + u_x(x_*, t_* + \xi) - u_x(x_*, t_*)] \quad \forall \xi \in (0, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.73)$$

dividiendo en (2.73) por ξ y haciendo tender ξ a cero, se obtiene $u_{tt}(x_*, t_*) = c^2 u_{xx}(x_*, t_*)$. \square

Como consecuencia del lema 2.7.4, podemos afirmar que hallar solución clásica del problema $(PCDO_h)$ basta construir una función $u : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, con $Q = (0, l) \times (0, +\infty)$, que sea solución generalizada de la EDP $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en Q y satisfaga las condiciones iniciales y de contorno, y a continuación comprobar que $u \in C^2(\bar{Q})$.

Para efectuar la construcción de la solución generalizada, se subdivide \bar{Q} en triángulos mediante las rectas características $x + ct = kl$ y $x - ct = -kl$, con $k \in \mathbb{Z}_+$. De esta forma, se tiene que

$$\bar{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{Q}_i$$

con

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x, t) \in Q; x + ct \in (0, l), x - ct \in (0, l)\} \\ Q_2 &= \{(x, t) \in Q; x + ct \in (0, l), x - ct \in (-l, 0)\} \\ Q_3 &= \{(x, t) \in Q; x + ct \in (l, 2l), x - ct \in (0, l)\} \\ &\dots \end{aligned}$$

luego, se va encontrando la solución generalizada por etapas, construyéndola para cada \bar{Q}_i , comenzando con $i = 1$ y así sucesivamente, como la demostración del teorema 2.7.3.

2.8. El Principio de Duhamel

Consideremos ahora el problema de Cauchy para la ecuación de ondas unidimensional no homogénea

$$(PCO) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x, t) & \text{con } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

para resolver (PCO), basta encontrar la solución del problema correspondiente a la ecuación homogénea con datos iniciales f y g , método ya aplicado anteriormente, y sumarle a la solución obtenida al problema

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x, t) && \text{con } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) &= 0 && \text{si } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) &= 0 && \text{si } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

así pues, la única cuestión que se plantea es cómo resolver (2.74). Esto último puede ser llevado a cabo mediante el denominado principio de Duhamel

Teorema 2.8.1. *Sea $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, consideremos el problema*

$$\left. \begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0 && \text{con } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ v(x, 0) &= 0 && \text{si } x \in \mathbb{R} \\ v_t(x, 0) &= h(x, s) && \text{si } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

denotemos por $v(\cdot, \cdot, s)$ a la única solución clásica de (2.75). Entonces, el problema (2.74) posee una y sólo una solución $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, que viene dada por la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t-s, s) ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.76)$$

Demostración. La unicidad es inmediata. Para la existencia, es fácil comprobar que la función u dada por (2.76) está bien definida y pertenece a $C^2(\mathbb{R}^2)$. Además evidentemente $u(x, 0) = 0$, y

$$u_t(x, t) = \int_0^t v_t(x, t-s, s) ds + v(x, 0, t) = \int_0^t v_t(x, t-s, s) ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.77)$$

de (2.77) se obtiene en particular que $u_t(x, 0) = 0$, y derivando nuevamente respecto de t

$$u_{tt}(x, t) = \int_0^t v_{tt}(x, t-s, s) ds + v_t(x, 0, t) = \int_0^t c^2 v_{xx}(x, t-s, s) ds + h(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

es decir

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_0^t v(x, t-s, s) ds \right) + h(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + h(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

□

Observación 2.8.1. Es sencillo, a partir del principio de Duhamel, escribir de forma explícita la fórmula que resuelve (2.74). Luego podemos encontrar, como solución u de (2.74)

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y, s) dy \right) ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

2.9. Conclusión

En este capítulo se clasificó las EDP (Laplace, Calor y Onda) y junto con ellas los problemas iniciales, mixtos y de contorno asociados a cada una de ellas. Se analizó el método de separación de variables para la resolución de cada EDP.

El estudio de la existencia y unicidad de la solución en cada uno de los problemas asociados a las EDP elípticas, hiperbólicas y parabólicas se pudo efectuar con algunas restricciones, esto se puede ver claramente en las hipótesis de los teoremas y lemas usados para demostrarlas.

Se pudo dar una solución clásica para los problemas iniciales, mixtos y de contorno en :

- Intervalos acotados del dominio.
- Se pudo debilitar las condiciones impuestas a las funciones que intervienen en cada problema gracias al **teorema (2.5.1)** a *funciones al menos continuas* ver **observación (2.5.2)**.

En capítulos posteriores, veremos como resolver estas EDP sin estas restricciones.

Capítulo 3

Transformada de Fourier

3.1. De la Serie a la Transformada de Fourier

Comencemos por tomar una función $f \in H$, donde H es un cierto espacio de funciones, en particular pediremos que sea un espacio de Hilbert, para garantizar que los cálculos sean más sencillos. La idea es expresar dicha función en términos de sus correspondientes coeficientes de Fourier y trabajar algebraicamente a fin de encontrar una expresión que nos sugiera de manera fácil la transformada de Fourier y su inversa.

Sea $H = L^2[-\pi, \pi]$, donde $f \in H$ si y sólo si

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

en H definimos el producto interno de la siguiente manera

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \forall f, g \in H$$

Se sabe que H es un Espacio de Hilbert, es decir, H es completo con la norma inducida por este producto interno.

Como

$$\{e_n = e^{in\pi x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

es un sistema ortonormal completo de H entonces

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad \forall f \in H,$$

donde $c_n = \langle f, e_n \rangle$ y es llamado el n -ésimo coeficiente de Fourier de f .

Podemos extender el concepto para cualquier l con $0 < l < \infty$, donde H será $H = L^2[l, l]$ y tomamos como conjunto fundamental

$$\left\{ e_n = e^{\frac{in\pi x}{l}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

por ser L^2 completo y por el teorema fundamental de Fourier

$$\forall f \in H, f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \quad (3.1)$$

calculemos

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \overline{e_n(t)} dt = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-\frac{in\pi t}{\ell}} dt$$

luego re escribiendo la igualdad (3.1) de la siguiente manera

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-\frac{in\pi t}{\ell}} dt \right) e^{\frac{in\pi t}{\ell}} \quad (3.2)$$

llamando $\xi_n = \frac{n}{2\ell}$ entonces $(\xi_{n+1} - \xi_n) = \frac{1}{2\ell}$ donde esta última expresión no depende de n . Y llamando $h(\xi_n)$ como

$$h(\xi_n) = \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-i2\pi\xi_n t} dt$$

luego reemplazando esto último en (3.2)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi_{n+1} - \xi_n) h(\xi_n) e^{i2\pi\xi_n x}$$

donde ésta expresión tiene el aspecto de una suma de Reimann, luego tomando $(\xi_{n+1} - \xi_n) = \Delta\xi = \frac{1}{2\ell}$ y se cumple que si $\ell \rightarrow \infty$, $\Delta\xi \rightarrow 0$

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\xi t} dt \right] e^{i2\pi\xi x} d\xi$$

Todo lo que hicimos es tratar de sugerir la definición de la transformada de Fourier y su inversa. Diremos que la transformada de Fourier de una función es una aplicación que denotaremos como \hat{f}

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi t x} dt$$

de manera análoga la transformada de Inversa de una función la denotamos como \check{f}

$$\check{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i2\pi\xi x} d\xi$$

Es claro que bajo ciertas hipótesis, que luego analizaremos, conocer la transformada de Fourier de una función \hat{f} , equivale a conocer dicha función f ya que al aplicar la transformada inversa a \hat{f} conoceremos a f .

Sólo para mencionar algunas aplicaciones, la transformada de Fourier se aplica al estudio de señales y sistemas, en óptica, en aparatos que son utilizados en tomografías, también en las técnicas que se emplean en resonancias magnéticas, al procesamiento de imágenes, etc.

Observación 3.1.1. Hemos sugerido la Transformada de Fourier y su inversa de una función f que pertenece a un espacio de funciones completo, más precisamente tomamos $f \in L^2(\mathbb{R})$. Nos plantearémos las siguientes preguntas y luego se intentará responderlas.

¿Qué condiciones debe cumplir f para poder encontrar su correspondiente transformada de Fourier? De poder encontrar la Transformada inversa \hat{f} ¿Será siempre cierto que al aplicarla a la Transformada de (\hat{f}) encontraré a la función f ?

¿Será posible aplicar el concepto de la Transformada de Fourier a otra *entidad* matemática que no sea una función?

Para responder las preguntas planteadas debilitemos las condiciones que le pedimos a f al intentar sugerir su transformada de Fourier correspondiente. Dijimos que f pertenecía a un Espacio de funciones al cual dotamos de un producto interno, y pedíamos que dicho espacio sea de Hilbert, ahora en adelante sólo necesitaremos de un espacio de pre-Hilbert.

Y para ampliar más nuestro campo de funciones diremos que el Espacio de funciones usadas serán las casi-continuas y la integral que calculemos en el producto interno será la integral de Lebesgue.

En la siguiente sección nos valeremos de estas nuevas y poderosas herramientas para dar una definición formal de la tan ansiada, Transformada de Fourier.

3.2. La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Decíamos que la Transformada de Fourier (TF) de una función es una aplicación descripta por:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi tx} dt$$

Es fácil ver que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ podemos encontrar su TF correspondiente.

Recordemos que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ equivale a decir que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

tomamos $|\hat{f}|$ y como $|e^{-i2\pi tx}| = 1$ luego

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi tx} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-i2\pi tx}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-i2\pi tx}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \end{aligned}$$

Con esto estamos diciendo que \hat{f} esta bien definida cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$. Esta condición es conocida como la condición débil de Dirichlet, también se suele decir que si f es integrable Lebesgue es posible encontrar su TF correspondiente.

Ahora estamos en condiciones de dar una definición formal para la TF de una función y extender el mismo concepto a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 3.2.1. Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier de f es una aplicación que llamaremos $\hat{f}(x)$

$\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-i2\pi t \cdot x} dt$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$

Observación 3.2.1. En la definición anterior $x \cdot t$ denota el producto interno usual de \mathbb{R}^n y $dt = dt_1 \cdots dt_n$ denota el elemento ordinario de la medida de Lebesgue.

Observación 3.2.2. Las funciones que consideraremos serán funciones medibles y la integral que consideramos es la integral de Lebesgue. En alguna literatura referida al tema de la transformada se toma funciones periódicas y la integral de la definición es la integral de Riemann.

Observación 3.2.3. No hay unanimidad a la hora de definir la TF. Esto tenemos que tenerlo muy presente al comparar las propiedades y teoremas ya que pueden variar los resultados obtenidos, a continuación daremos algunas definiciones más usadas en las diferentes áreas que emplean la TF:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx} dt \\ \mathcal{F}(f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt \\ \mathcal{F}(f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt \\ \mathcal{F}(f)(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx} dt\end{aligned}$$

Enunciaremos algunas propiedades importantes de la TF como algunos teoremas que sirven para caracterizarla pero primero veamos el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, este espacio será usado para demostrar de forma sencilla algunas propiedades y teoremas de la TF que más adelante lo estudiaremos con más detenimiento.

Definición 3.2.2. Diremos que $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si cumple que

1. $\varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty$
2. para todo n, m enteros no negativos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right| < c(n, m)$$

donde $c(n, m)$ es un constante que depende de n y m .

Teorema 3.2.1. La Transformada de Fourier (TF) es una aplicación lineal, es decir, para todo $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos $\mathcal{F}(\lambda f + \beta g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$.

Demostración. por definición y ya que la integral es una aplicación lineal tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lambda f + \beta g) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(t) + \beta g(t))e^{-i2\pi t \cdot x} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(t))e^{-i2\pi t \cdot x} dt + \int_{\mathbb{R}^n} (\beta g(t))e^{-i2\pi t \cdot x} dt \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-i2\pi t \cdot x} dt + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(t)e^{-i2\pi t \cdot x} dt \\ &= \lambda \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2. *Propiedades Analíticas de la Transformada de Fourier*

a) La aplicación \mathcal{F} definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \hat{f}\end{aligned}$$

es una transformación lineal acotada y además $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces \hat{f} es uniformemente continua.

Demostración. a) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(f)(x)| &= |\hat{f}(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-i2\pi t \cdot x} dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| |e^{-i2\pi t \cdot x}| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| dt = \|f\|_1.\end{aligned}$$

Luego, se tiene que $|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_1$ en casi todo punto x y por definición de la norma $\|\cdot\|_\infty$ se sigue que

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Para b)

Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que $\int_{\|t\| \geq R} |f(t)| dt < \varepsilon$

por la continuidad de $e^{-2\pi iz}$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|z| < \delta$ luego $|e^{-2\pi iz} - 1| < \varepsilon$ tomemos $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\eta\| < \frac{\delta}{R}$ (que depende de ε pero no de x). Por Cauchy-Schwartz si $\|t\| < R$ entonces $|\eta \cdot t| \leq \|t\| \|\eta\| < R \cdot \frac{\delta}{R} = \delta$ y por lo tanto $|e^{-2\pi i \eta \cdot t} - 1| < \varepsilon$.

Así resulta que

$$\begin{aligned}|\hat{f}(x + \eta) - \hat{f}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x+\eta) \cdot t} f(t) dt - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot t} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot t} (e^{-2\pi i \eta \cdot t} - 1) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i x \cdot t}| |e^{-2\pi i \eta \cdot t} - 1| |f(t)| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i \eta \cdot t} - 1| |f(t)| dt \\ &\leq \underbrace{\int_{\|t\| \geq R} |e^{-2\pi i \eta \cdot t} - 1| |f(t)| dt}_I + \underbrace{\int_{\|t\| < R} |e^{-2\pi i \eta \cdot t} - 1| |f(t)| dt}_{II}\end{aligned}$$

Como $e^{-2\pi i \eta \cdot t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ luego $|e^{-2\pi i \eta \cdot t} - 1| \leq 2$ y así obtenemos que

$$I \leq 2 \int_{\|t\| \geq R} |f(t)| dt < 2\varepsilon$$

Por otro lado si $\|t\| < R$ entonces $|\eta \cdot t| \leq \delta$, luego $|e^{-2\pi i \eta \cdot t} - 1| < \varepsilon$.
Mediante la cuenta anterior podemos acotar II de la siguiente manera

$$II \leq \varepsilon \|f\|_1$$

luego obtenemos lo siguiente

$$\left| \hat{f}(x + \eta) - \hat{f}(x) \right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon \|f\|_1 = C_\varepsilon$$

donde C_ε es una constante (que depende de ε pero no de x) concluyendo así que \hat{f} es uniformemente continua. \square

Definición 3.2.3. Sea $C_0(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Enunciemos ahora el conocido Lema de Reimann-Lebesgue que concluye que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2.3. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \hat{f}(x) = 0$.

Demostración. para demostrar en forma sencilla este importante teorema recordemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de las funciones temperadas es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$ de modo que toda función en \mathcal{S} tiene una transformada de Fourier en el sentido usual.

Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{S}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)| dt < \varepsilon$

luego

$$\begin{aligned} \hat{f} &\leq \left| \hat{f} \right| = \left| \hat{f} + \hat{g} - \hat{g} \right| \\ &\leq \left| \hat{f} - \hat{g} \right| + |\hat{g}| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f - g)(t)| |e^{-2\pi i t \cdot x}| dt + |\hat{g}| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f - g)(t)| dt + |\hat{g}| \end{aligned}$$

de donde $\hat{f} \leq \varepsilon + |\hat{g}|$. Luego, como para las funciones de clase Schwartz este teorema es cierto entonces tomando límite en ambos miembros de la última desigualdad obtenemos

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \hat{f} \leq \varepsilon$$

y esto se cumple para todo $\varepsilon > 0$ luego

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \hat{f}(x) = 0$$

\square

Además de las operaciones de espacios vectoriales, $L^1(\mathbb{R}^n)$ es dotado de una multiplicación, que hace de este un álgebra de Banach.

Esta operación es llamada *convolución* y se define de la siguiente manera:

Definición 3.2.4. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, su convolución denotada por $f * g$ es la función definida en \mathbb{R}^n por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Se puede demostrar que la función $f(x-y)g(y)$ es una función medible de dos variables x e y , luego utilizando el teorema de Fubini se llega a que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \tag{3.3}$$

Podemos observar, también que la convolución cumple las siguientes propiedades:

Proposición 3.2.1. Si f, g y $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces:

1. $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
2. $f * g = g * f$
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$
4. $(f + g) * h = f * h + g * h$

Luego, tenemos que $L^1(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach conmutativa con el producto dado por la convolución.

En general $h = f * g$ está bien definida siempre que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Además, se cumple que

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Observación 3.2.4. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ no es sobreyectiva.

Demostración. Para mostrar que no es sobreyectiva tomemos $n = 1$ y la función:

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{\text{sgn}(x)}{1+\log|x|} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$\phi(x) \in C_0(\mathbb{R})$ y supongamos que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\phi = \hat{f}$, llegamos a un absurdo. Dado $a > 1$

$$\begin{aligned} \int_{1 < |x| < a} \frac{\phi(x)}{x} dx &= \int_{1 < |x| < a} \frac{\hat{f}(x)}{x} dx \\ &= \int_{1 < |x| < a} \frac{1}{x} \left(\int e^{-2\pi i y x} f(y) dy \right) dx = \int_{1 < |x| < a} f(y) \left(\int \frac{e^{-2\pi i y x}}{x} dx \right) dy \\ &= \int f(y) \left(-2i \int_1^a \frac{\text{sen}(2\pi y x)}{x} dx \right) dy \end{aligned}$$

tomando $\Delta(a, y) = \int_1^a \frac{\text{sen}(2\pi y x)}{x} dx$ luego de utilizar integración por partes dos veces obtenemos que:

$$|\Delta(a, y)| \leq M \text{ para todo } a > 1 \text{ y } \forall y \in \mathbb{R}$$

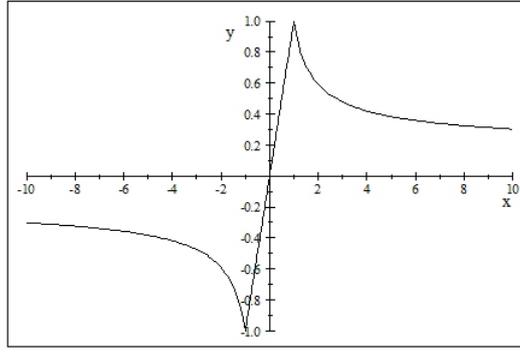


Figura 3.1: Gráfica de la función $\phi(x)$.

por lo tanto

$$\int_{1 < |x| < a} \frac{\phi(x)}{x} dx \leq 2M \|f\|_1$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{1 < |x| < a} \frac{\phi(x)}{x} dx &= \int_{1 < |x| < a} \frac{1}{|x| (1 + \log |x|)} dx \\ &= 2 \int_1^a \frac{1}{1 + \log |x|} \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \int_0^{\log a} \frac{1}{1 + u} du = 2 \log(1 + u) \Big|_0^{\log(a)} \end{aligned}$$

tomando límite cuando $a \rightarrow +\infty$ se tiene que la última igualdad tiende a $+\infty$, llegando al absurdo. \square

Teorema 3.2.4. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{(f * g)} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Demostración. Sea $h = f * g$, luego por definición de TF y convolución

$$\mathcal{F}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t \cdot x} h(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t \cdot x} (f * g)(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t \cdot x} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t - y) g(y) dy \right) dt$$

aplicamos el teorema de Fubini, ya que $h(t)$ es integrable

$$\mathcal{F}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t \cdot x} f(t - y) dt \right) dy$$

realizamos el cambio de variable $u = t - y$ entonces $t = u + y$, $du = dt$

$$\mathcal{F}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot (u+y)} f(u) du \right) dy$$

finalmente

$$\mathcal{F}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot u} f(u) du \right) e^{-2\pi i x \cdot y} dy = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

\square

Observamos que el espacio $C_0(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach con el producto dado por la multiplicación de funciones punto a punto

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $f, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Ahora podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.2.5. *La Transformada de Fourier*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow C_0(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de álgebras de Banach, con norma igual a uno.

Demostración. La demostración del corolario sale aplicando el Teorema (3.2.4) y la desigualdad (3.3). \square

También tenemos las siguientes propiedades algebraicas para la Transformada de Fourier.

Proposición 3.2.2. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

1. Linealidad: $\widehat{af + bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$
2. Conjugación: $\widehat{\overline{f(\xi)}} = \overline{\widehat{f(-\xi)}}$
3. Traslación: Sea $\tau_h f(x) = f(x - h)$ entonces $\widehat{(\tau_h f)(x)} = e^{-2\pi i h \cdot x} \hat{f}(x)$
4. Modulación: Sea $g(x) = e^{-2\pi i h \cdot x} f(x)$, entonces $\hat{g}(x) = (\tau_h f(x))^\wedge$
5. Dilatación: Si $a > 0$ entonces $a^n \widehat{(\delta_a f)}(x) = \hat{f}(a^{-1}x)$, donde δ_a es una transformación lineal definida por $\delta_a : f(x) = f(ax)$.

El siguiente teorema muestra la relación entre la transformada de Fourier y la diferenciación. Afirma que después de aplicar la TF a la función k -coordenada es equivalente, salvo una constante multiplicativa, tomar la derivada parcial con respecto a la k -ésima variable de la TF.

Es también cierto que la TF de tales derivadas parciales se obtiene nuevamente, salvo una constante, aplicando la TF en la correspondiente función coordenada.

Antes de enunciar el teorema daremos la siguiente definición que nos ayudara en la demostración del teorema.

Definición 3.2.5. Decimos que f es diferenciable en la norma L^p respecto a x_k , si dado $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h_k} - g(x) \right|^p dx \right)^{1/p} = 0$$

la función g es llamada la derivada parcial de f respecto a x_k en la norma L^p .

Teorema 3.2.6. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $x_k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, donde x_k es la k -función coordenada. Entonces \hat{f} es diferenciable con respecto a x_k y además*

$$\frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial x_k} = (-2\pi i t_k \widehat{t_k f})(x)$$

Demostración. Dado $h = (0, \dots, h_k, \dots, 0)$ un vector no nulo tal que la coordenada k -ésima, $h_k \neq 0$ tenemos que usando el teorema (3.2.2) parte 4 y por el teorema de convergencia dominada Lebesgue y utilizando la definición (3.2.5).

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} = (-2\pi i t_k f(t))(x)$$

donde

$$\frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} = \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i t \cdot h} - 1}{h_k} \right) f(t) \right\}(x)$$

Encontraremos muchas versiones del resultado anterior para realizar la demostración quizás la más sencilla es aplicando la definición (3.2.5) □

Aplicando la parte 3 del teorema (3.2.2) junto a la primera parte del teorema (3.2.2) a

$$\frac{\hat{g}(x) - \hat{f}(x)(e^{2\pi i(h \cdot x)} - 1)}{h_k}$$

y haciendo tender $h_k \rightarrow 0$ se obtiene el siguiente teorema

Teorema 3.2.7. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y g es la derivada parcial de f con respecto a x_k en la norma L^1 , entonces se tiene que

$$\hat{g}(x) = 2\pi i x_k \hat{f}(x)$$

Demostración. Para realizar esta demostración de manera sencilla tomemos $n = 1$ con lo cual se debe mostrar, es que:

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g = f'$ entonces

$$\hat{g} = \mathcal{F}(f') = 2\pi i x \hat{f}$$

primero realizamos el siguiente cálculo:

$$\hat{g} = \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i2\pi t x} dt$$

y usando integral por partes

$$\hat{g} = (f(t)e^{-i2\pi t x}) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - (-2\pi i x \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi t x} dt)$$

recordemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|$ es acotado

finalmente

$$\hat{g} = 2\pi i x \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi t x} dt = 2\pi i x \hat{f}$$

□

Juntando los teoremas (3.2.6) y (3.2.7) enunciados anteriormente podemos extender los conceptos a derivadas de orden superior. Sin entrar en demasiados detalles, tenemos que:

$$1. P(D)\hat{f}(x) = (P(-2\pi it)f(t))\check{f}(x)$$

$$2. (P(D)f)\check{f}(x) = P(2\pi ix)\hat{f}(x)$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_i > 0$, $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n})$, $D^\alpha = \partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ y P es un polinomio en las n variables x_1, \dots, x_n , con $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $P = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ y $P(D)$ es el operador diferencial asociado a D .

El principal problema en la teoría de la TF en $L^1(\mathbb{R}^n)$, es obtener la función f a partir de su TF. Como se dijo antes, la TF es una aplicación lineal de $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$, pero no toda función con esas características es la TF de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Es más, uno esperaría que

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi it \cdot x} dx$$

pero lamentablemente, \hat{f} no tiene porque ser integrable. (Por ejemplo, basta tomar $n = 1$ y f la función característica de un intervalo finito.)

Para solucionar lo mencionado anteriormente, usamos métodos de sumabilidad de integrales, por ejemplo, el método de sumabilidad de Abel o el método de sumabilidad de Gauss.

Para cada $\varepsilon > 0$ definimos la *medida de Abel*, $A_\varepsilon = A_\varepsilon(f)$ como la integral

$$A_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\varepsilon|x|} dx$$

Es claro que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

Por otro lado, esta *medida de Abel* está bien definida cuando f no es integrable (Si asumimos, por ejemplo que f está acotada entonces $A_\varepsilon(f)$ está definida para todo $\varepsilon > 0$)

Además, su límite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\varepsilon|x|} dx$$

puede existir incluso cuando f no es integrable.

Siempre que el $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(f)$ exista y sea finito decimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

es **sumable en el sentido de Abel**.

Definición 3.2.6. Decimos que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ es sumable y su suma es l , en el sentido de Abel, si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\varepsilon|x|} dx$$

existe y es igual a l .

Otro método de sumabilidad es la **sumabilidad de Gauss**, éste método está definido mediante la medida de Gauss (A veces llamada Gauss-Weierstrass).

$$G_\varepsilon(f) = G_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\varepsilon|x|^2} dx$$

Definición 3.2.7. Decimos que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ es sumable y su suma es l , en el sentido de Gauss, si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\varepsilon|x|^2} dx$$

existe y es igual a l .

La medida de Abel (3.2.6) y Gauss (3.2.7) se pueden expresar en una forma más general:

$$M_{\varepsilon, \Phi}(f) = M_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon x) f(x) dx \quad (3.4)$$

donde $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $\Phi(0) = 1$.

Luego $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ es sumable y de suma l si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon(f) = l$. Llamamos $M_\varepsilon(f)$ la medida Φ de ésta integral.

Ahora tenemos que conocer la TF de las funciones $e^{-\varepsilon|x|^2}$ y $e^{-\varepsilon|x|}$. El cálculo de la primera de ellas es fácil y se reduce al caso unidimensional, primero calculemos la TF de $e^{-4\pi^2|x|^2}$ por definición tendremos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|x|^2} e^{-i2\pi x \cdot t} dx = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_j^2} e^{-i2\pi x_j t_j} dx_j \quad (3.5)$$

realizando el cálculo unidimensional

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x^2} e^{-i2\pi x t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x^2 - i2\pi x t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x + it/2)^2 - (t^2/4)} dx = e^{-t^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x + it/2)^2} dx$$

usamos el siguiente cambio de variables $z = 2\pi x + it/2$ luego $dz = 2\pi dx$ reemplazando en lo antes obtenido y tomando el resultado de la conocida integral de Gauss (hay diferentes formas de obtener el resultado de la integral, por ejemplo usando cálculo de variable compleja). Resulta

$$e^{-t^2/4} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = e^{-t^2/4} 2^{-1} \pi^{-1/2}$$

volviendo a (3.5) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|x|^2} e^{-i2\pi x \cdot t} dx = \prod_{j=1}^n e^{-t_j^2/4} 2^{-1} \pi^{-1/2} = 2^{-n} \pi^{-n/2} e^{-|t|^2/4} \quad (3.6)$$

finalmente para obtener la TF de $e^{-\varepsilon|x|^2}$ y realizando un cambio de variable apropiado $(\sqrt{\alpha}/2\sqrt{\pi})y = x$ podemos generalizar el resultado expresándolo mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.2.8. Para todo $\alpha > 0$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi i t \cdot y} dy = \alpha^{-n} \pi^{-n/2} e^{-|t|^2/\alpha}$$

Demostración. La demostración es sencilla volviendo a la variable x y usando (3.5) y (3.6) □

Como consecuencia del teorema si tomamos $\alpha = 1$ muestra que la función $e^{-\pi|x|^2}$ es su propia transformada de Fourier.

Teorema 3.2.9. Para todo $\alpha > 0$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\alpha|y|} e^{-2\pi it \cdot y} dy = C_n \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{n+1/2}}$$

donde $C_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\pi^{(n+1)/2}}$

Demostración. La demostración de este teorema es más complicado que el anterior. Por un cambio de variables veremos que será suficiente tomar $\alpha = 1$. A fin de mostrar este resultado supongamos cierta la siguiente igualdad:

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta^2/4u} du \quad (3.7)$$

para todo $\beta > 0$ luego, usando el teorema (3.2.8) para establecer la tercera igualdad

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|} e^{-2\pi it \cdot y} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-4\pi^2|y|^2/4u} du \right\} e^{-i2\pi t \cdot y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|y|^2/4u} e^{-i2\pi t \cdot y} dy \right\} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \left(\sqrt{\frac{u}{\pi}} \right)^n e^{-u|t|^2} \right\} du \\ &= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \int_0^\infty e^{-u} u^{(n-1)/2} e^{-u|t|^2} du \\ &= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{(n-1)/2} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+1/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}} \end{aligned}$$

Así el teorema estaría demostrado, solo nos quedara demostrar (3.7) usando las siguientes identidades

$$e^{-\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx \quad (3.8)$$

con $\beta > 0$ y

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u} du \quad (3.9)$$

La segunda de estas igualdades, la (3.9), es evidente mientras que la primera es una aplicación de la teoría de residuos a la función $e^{i\beta z/(1+z^2)}$, luego

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \beta x \left\{ \int_0^\infty e^{-u} e^{-ux^2} du \right\} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \int_0^\infty e^{-ux^2} \cos \beta x dx \right\} du = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-ux^2} e^{i\beta x} dx \right\} du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \pi \int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2 uy^2} e^{-2\pi i\beta y} dy \right\} du = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\beta^2/4u} \right\} du \end{aligned}$$

con lo que el teorema queda demostrado. □

Observación 3.2.5. Denotamos la TF de las funciones $e^{4\pi^2\alpha|y|^2}$ y $e^{-2\pi\alpha|y|}$ donde $\alpha > 0$ con W y P respectivamente. Esto es:

$$W(t, \alpha) = (4\pi\alpha)^{-(n/2)} e^{-|t|^2/4\alpha}$$

$$P(t, \alpha) = C_n \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{n+1/2}}$$

La función $W(t, \alpha)$ es llamada el *núcleo de Gauss-Weierstrass* y $P(t, \alpha)$ el *núcleo de Poisson*.

Podemos mostrar que la medida de Abel y la medida de Gauss de la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi it \cdot x} dx$ converge en casi todo punto y en norma a f .

La idea es expresar esas medias en términos de la convolución de f con los núcleos $W(t, \alpha)$ y $P(t, \alpha)$ y a continuación usar la teoría de la aproximación de la identidad.

Para obtener esas expresiones usaremos los resultados siguientes

Teorema 3.2.10. Fórmula de Multiplicación. Sean f, g que pertenecen a $L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx$$

Demostración. La demostración es sencilla primero aplicamos la definición de la TF y luego el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi it \cdot x} dt \right] g(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi it \cdot x} dx \right] f(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{g}(t)dt \end{aligned}$$

□

Supongamos ahora que la función Φ dada en (3.4) que cumple la condición $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $\Phi(0) = 1$ es integrable y su TF es $\hat{\Phi} = \varphi$.

Si tenemos que $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$, luego por la *dilatación* de la proposición (3.2.2) implica $(\delta_\varepsilon\hat{\Phi})(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon) = \varphi_\varepsilon$.

El teorema (3.2.8) nos muestra que cuando $\Phi = e^{-4\pi^2|x|^2}$ obtenemos $\varphi_\varepsilon(x) = W(x, \varepsilon^2)$ y similarmente por el teorema (3.2.9) obtenemos que $\varphi_\varepsilon(x) = P(x, \varepsilon)$ con $\Phi = e^{-2\pi|x|}$. Aplicando la fórmula de multiplicación a $f(x)$ y a $e^{2\pi it \cdot x}\delta_\varepsilon\hat{\Phi}(x)$ luego usando la *modulación* de la proposición (3.2.2), obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.11. Si f y $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi = \hat{\Phi}$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi it \cdot x}\Phi(\varepsilon x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x - t)dx$$

En particular, para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi it \cdot x}e^{-2\pi\varepsilon|x|}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)P(x - t, \varepsilon)dx$$

y para todo $\alpha > 0$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} e^{-4\pi^2 \alpha |x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) W(x - t, \alpha) dx$$

Vamos a demostrar que la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx$ es sumable a f para una clase mayor de métodos de sumabilidad, que incluye la sumabilidad de Abel y de Gauss. Veamos que significa que $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} \Phi(\varepsilon x) dx$ converga a f en la norma $L^1(\mathbb{R}^n)$ bajo las siguientes condiciones

- $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- $\hat{\Phi} = \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$

Se puede mostrar que el núcleo de Poisson y el núcleo de Gauss-Weierstrass cumplen estas condiciones. Para ello enunciemos el siguiente lema.

Lema 3.2.12. (a) $\int_{\mathbb{R}^n} W(x, \alpha) dx = 1 \quad \forall \alpha > 0$

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} P(x, \varepsilon) dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

A continuación enunciemos el teorema de aproximación a la identidad.

Teorema 3.2.13. Supongamos que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ y para $\varepsilon > 0$, sea $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ o $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$$

En particular, $u(x, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) P(x - t, \varepsilon) dt$ y $s(x, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) W(x - t, \varepsilon) dt$ convergen a f en norma L^p , $\varepsilon \rightarrow 0$.

Observación 3.2.6. La función $u(x, \varepsilon)$ definida sobre \mathbb{R}^n , con $\varepsilon > 0$ se llama la integral de Poisson de f y la función $s(x, \varepsilon)$ es conocida como la integral de Gauss-Weierstrass de f .

Demostración. Haciendo un cambio de variables tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \varphi(t/\varepsilon) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u) du = 1$$

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - t) \varphi_\varepsilon(t) dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_\varepsilon(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x - t) - f(x)) \varphi_\varepsilon(t) dt$$

luego por la desigualdad de Minkowsky para integrales se tiene que

$$\begin{aligned} \|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x - t) - f(x)) \varphi_\varepsilon(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f(x - t) - f(x)) \varphi_\varepsilon(t)|^p dx \right)^{1/p} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f(x - t) - f(x))|^p dx \right)^{1/p} |\varphi_\varepsilon(t)| dt \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f(x-t) - f(x))^p dx \right)^{1/p} |\varphi_\varepsilon(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \varepsilon^{-n} |\varphi(t/\varepsilon)| dt \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable $u = t/\varepsilon$ y $du = 1/\varepsilon^n dt$ tenemos que:

$$\|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \varepsilon u) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} |\varphi(u)| du$$

Por otro lado la expresión

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \omega_{p,f}(h) = \omega(h)$$

es conocida como el módulo de continuidad en L^p de f .

Observar que $\omega(h)$ es una función acotada como función en h usando la desigualdad de Minkowsky:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

luego

$$\omega(h) \leq 2 \|f\|_{L^p}^p$$

Ademas, tenemos que $\lim_{|h| \rightarrow 0} \omega(h) = 0$.

Si tomamos una función $g \in C_0 \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ y sea $K = \text{sop}(g)$ y $K_1 = \{x : d(x, K) \leq 1\}$.

Supongamos que $|h| < \delta$ entonces como g es continua en el compacto K_1 , se tiene que es uniformemente continua

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x+h) - g(x)|^p dx = \int_{K_1} |g(x+h) - g(x)|^p dx \leq \varepsilon^p m(K_1)$$

es decir que si $|h| < \delta$ entonces tenemos que

$$\|g(x+h) - g(x)\|_p < \varepsilon$$

Tomemos ahora $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in C_0$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$ lo cual es posible por ser C_0 denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ahora probemos que $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0$

luego si $|h| < \delta$

$$\begin{aligned} \|(f(x+h) - f(x))\|_p &\leq \|f(x+h) - g(x+h)\|_p + \|g(x+h) - g(x)\|_p + \|g(x) - f(x)\|_p \\ &= 2 \|f(x) - g(x)\|_p + \|g(x+h) - g(x)\|_p < 3\varepsilon \end{aligned}$$

Entonces si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \varepsilon t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} |\varphi(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega(-\varepsilon t) |\varphi(t)| dt \end{aligned}$$

Esta última igualdad tiende a cero cuando, $\varepsilon \rightarrow 0$, debido al teorema de convergencia dominada, ya que

$$\begin{aligned} |\omega(-\varepsilon t) \varphi(t)| &\leq 2 \|f\|_p |\varphi(t)| \\ 2 \|f\|_p &\in L^1(\mathbb{R}^n) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(-\varepsilon t) \varphi(t) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x)) \varphi_\varepsilon(t) dt$$

entonces

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f(x-t) - f(x))| |\varphi_\varepsilon(t)| dt$$

como f es continua en x , entonces dado $\eta > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x-t) - f(x)| < \eta$, si $|t| < \delta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f(x-t) - f(x))| |\varphi_\varepsilon(t)| dt \\ &= \int_{|t| < \delta} |(f(x-t) - f(x))| |\varphi_\varepsilon(t)| dt + \int_{|t| > \delta} |(f(x-t) - f(x))| |\varphi_\varepsilon(t)| dt \end{aligned}$$

Como $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que:

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| \leq \eta \int_{|t| < \delta} |\varphi_\varepsilon(t)| dt + 2 \|f\|_\infty \int_{|t| > \delta} |\varphi_\varepsilon(t)| dt$$

se observa que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \delta} |\varphi_\varepsilon(t)| dt = 0$ luego, usando el cambio de variables $y = t/\varepsilon$ se tiene que

$$\int_{|t| > \delta} |\varphi_\varepsilon(t)| dt = \varepsilon^{-n} \int_{|t| > \delta} |\varphi(t/\varepsilon)| dt = \int_{|y| > \delta/\varepsilon} |\varphi(y)| dy$$

Por el teorema de convergencia dominada, como $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\int_{|t| > \delta} |\varphi_\varepsilon(t)| dt$$

esta última integral tiende a cero cuando ε tiende a cero, luego podemos concluir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_\infty = 0$$

□

Del teorema podemos expresar el siguiente Corolario.

Corolario 3.2.14. *Supongamos que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)dt = 0$ entonces*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(f * \varphi_\varepsilon)\|_p = 0$$

siempre que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ ó $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Demostración. Si tomamos:

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) = (f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) \cdot 0 = (f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-t) - f(x)]\varphi_\varepsilon(t)dt$$

luego se procede de manera similar que en la del teorema anterior. \square

Usando el teorema (3.2.11) y (3.2.13) obtenemos una solución al problema de la inversión de Fourier.

Teorema 3.2.15. *Si Φ y su transformada de Fourier $\hat{\Phi} = \varphi$ son integrables y $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ entonces la medida Φ de la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e^{2\pi it \cdot x}dt$ converge a $f(x)$ en norma L^1 . En particular la medida de Abel y la medida de Gauss de esa integral converge en norma L^1*

Ya que $S(x, \alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)W(x-t, \alpha)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e^{2\pi it \cdot x}e^{-4\pi^2 \alpha |t|^2}dt$ converge a $f(x)$ en L^1 cuando α tiende a 0^+ , podemos encontrar una sucesión $\alpha_k \rightarrow 0$ tal que $S(x, \alpha_k) \rightarrow f(x)$ en casi todo punto de x . Si además asumimos que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por el teorema de convergencia dominada tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 3.2.16. Condición Necesaria y Suficiente para la Existencia de la TF Inversa
Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e^{2\pi i x \cdot t} dt$$

en casi todo punto de x .

Observación 3.2.7. Vimos que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por el teorema de caracterización de la TF \hat{f} es continua. Si además \hat{f} es integrable, la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e^{2\pi it \cdot x}dt$ también define una función continua (ya que ésta función es igual $(\hat{f})(-x)$). De esta manera cambiando a f sobre un conjunto de medida nula podemos obtener la igualdad del corolario (3.2.15) para todo x . En otras palabras, f se puede convertir en una función continua, cambiando sus valores en un conjunto de medida nula.

Observación 3.2.8. Del teorema (3.2.14) se puede deducir que si $\hat{f}(x) = 0$ para casi todo x , entonces $f(t) = 0$ para casi todo t .

A partir de esta observación podemos afirmar que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ es inyectiva.

Ahora nos encontramos en condiciones de dar la siguiente definición.

Definición 3.2.8. El operador definido por:

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} F(x) dx$$

se llama la Transformada de Fourier inversa.

Observación 3.2.9. Por el teorema de inversión, si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(f) = f$ en casi todo punto.

Observación 3.2.10. El problema de la inversión de Fourier también tiene solución en el sentido puntual. Pero para ello necesitamos introducir otros conceptos referidos a la teoría de diferenciación de integrales de funciones definidas sobre \mathbb{R}^n . Si se desarrolla estos conceptos el estudio de la TF será más exhaustivo, a continuación abordaremos dichos conceptos y enunciaremos algunos teoremas sin llegar a demostrarlos.

Comencemos por introducir un importante resultado de la teoría de diferenciación de integrales de funciones definidas en \mathbb{R}^n .

Si f es localmente integrable en \mathbb{R}^n ($f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) entonces para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|t| < r} (f(x-t) - f(x)) dt = 0$$

En particular, esto es cierto para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Llamamos al conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|t| < r} |(f(x-t) - f(x))| dt = 0 \right\}$$

el conjunto de Lebesgue e incluye casi todos los puntos de \mathbb{R}^n .

De forma más general, un resultado puntual que corresponde a una versión del teorema de aproximación a la identidad.

Teorema 3.2.17. Supongamos que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $\varphi_\varepsilon(x) = \sup_{|t| \geq |x|} |\varphi(t)|$ y sea $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$. Si $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) dt$$

siempre que x pertenezca al conjunto de Lebesgue de f .

En particular, la integral de Poisson $\int_{\mathbb{R}^n} f(t) P(x-t, \varepsilon) dt$

y la integral de Gauss-Weierstrass $\int_{\mathbb{R}^n} f(t) W(x-t, \varepsilon) dt$ converge a $f(x)$, cuando ε tiende a cero para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Se sabe que si x es punto de continuidad de f , entonces x pertenece al conjunto de Lebesgue de f , luego el teorema anterior es válido también para todo punto de continuidad de f . Si además asumimos que $\hat{f} \geq 0$, se sigue por el lema de Fatou que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Así la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx$ define una función continua de t que es igual a $f(t)$ en casi todo punto, por el corolario (3.2.16) se deduce el siguiente resultado.

Corolario 3.2.18. Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \geq 0$. Si f es continua en el cero entonces $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx$$

para casi todo x (es decir en cada punto de Lebesgue de f). En particular

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) dx$$

Una consecuencia inmediata del corolario anterior y de las formulas obtenidas en teoremas anteriores

Corolario 3.2.19. Para todo $\alpha > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} a) \int_{\mathbb{R}^n} W(x, \alpha) e^{2\pi i t \cdot x} dx &= e^{-4\pi^2 \alpha |t|^2} \\ b) \int_{\mathbb{R}^n} P(x, \alpha) e^{2\pi i t \cdot x} dx &= e^{-2\pi \alpha |t|} \end{aligned}$$

3.3. La Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y el Teorema de Plancherel

Las funciones de cuadrado integrables no tiene por que ser integrables, por lo tanto la definición de la TF podría no tener sentido. Sin embargo, como vimos al comenzar nuestro estudio, la TF tiene una definición natural sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ y una teoría en particular elegante.

Presentaremos los resultados más importantes.

Si además de ser integrable, asumimos que f es de cuadrado integrable entonces \hat{f} debe ser también de cuadrado integrable.

Teorema 3.3.1. Si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

Demostración. Sea $g(x) = \overline{f(-x)}$ y por los teoremas ya demostrados teníamos que si

$$h = f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

luego

$$\hat{h} = \hat{f} \hat{g}$$

y como $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$ tendremos que

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \hat{f} \overline{\hat{f}} \\ \hat{h} &= |f|^2 \end{aligned}$$

y por el corolario(3.2.18) tenemos que $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(x) dx$$

asi tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(x) dx \\ &= h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(0-x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx \end{aligned}$$

luego

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

□

Este teorema afirma que la transformada de Fourier es un operador lineal acotado sobre el subconjunto denso $L^1 \cap L^2$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Además existe una extensión acotada, \mathcal{F} de este operador a todo $L^2(\mathbb{R}^n)$, \mathcal{F} se llama la **transformada de Fourier** sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Usaremos la notación $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ donde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n)$$

esto es posible debido al hecho que $\overline{L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)} = L^2(\mathbb{R}^n)$ por ejemplo

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{en } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| > n \end{cases}$$

tenemos que

$$\|f_n - f\| = \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx$$

tiende a cero, cuando n tiende a infinito.

Como $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ converge a f en $L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Luego tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2} = \|f_n - f_m\|_{L^2} = 0$$

por lo que se tiene $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces como $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio completo, existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n)$$

Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \hat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir, \hat{f} es límite en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de la sucesión $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^\infty$ definida por

$$\hat{f}_n(x) = \int_{|t| \leq n} f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f_n(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt$$

Como dijimos antes, $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ se llamará la transformada de Fourier de f . Observamos también que:

1. $\|\hat{f}_n\|_{L^2} = \|f_n\|_{L^2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.
2. \hat{f} no depende de la sucesión elegida.

Ya que, sea $\{g_n\} \subseteq L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \|\hat{g}_n - \hat{f}\|_{L^2} &\leq \|\hat{g}_n - \hat{f}_n\|_{L^2} + \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_{L^2} = \|g_n - f_n\|_{L^2} + \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_{L^2} \\ &= \|g_n - f\|_{L^2} + \|f - f_n\|_{L^2} + \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_{L^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde la ultima expresión obtenida en (3.10) tiende a cero, cuando n tiende a infinito. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}_n = \hat{f} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n)$$

Observemos que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la nueva definición no cambia la TF porque se puede tomar $f_n = f$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.2. Teorema de Plancherel La transformada de Fourier definida en $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ se extiende unívocamente a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y verifica para toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ que

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

Para demostrar este importante teorema lo podemos dividir en dos teoremas más sencillos. Antes de enunciar dichos teoremas recordemos una definición que nos sera útil.

Definición 3.3.1. Un operador Lineal sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ que es una isometría y una función sobreyectiva en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es llamado **operador unitario**

Teorema 3.3.3. La transformada de Fourier es un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$

Demostración. Ya que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es una isometría se cumple que

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

entonces su rango $R(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ es un subespacio cerrado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Si este subespacio no fuera todo $L^2(\mathbb{R}^n)$, como $R(\mathcal{F})$ es cerrado, entonces $R(\mathcal{F}) \oplus R(\mathcal{F})^\perp$ y como $R(\mathcal{F}) \neq L^2(\mathbb{R}^n)$, podríamos encontrar una función g tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = 0$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|g\|_{L^2} \neq 0$.

Por la fórmula de multiplicación se tiene que para toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = 0$$

como la fórmula de multiplicación se extiende a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = 0 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

y por lo tanto $\hat{g} = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Contradice así que $\|g\|_{L^2} = \|\hat{g}\|_{L^2} \neq 0$. □

Teorema 3.3.4. *La inversa de la transformada de Fourier \mathcal{F}^{-1} puede obtenerse escribiendo*

$$\mathcal{F}^{-1}(g(x)) = \mathcal{F}(g(-x)) \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. Como \mathcal{F} es un operador unitario preserva el producto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \overline{v(x)} dx$$

Sea g cualquier función en $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión dado por

$$f_n(x) = \int_{|t| \leq n} \hat{f}(t) e^{2\pi i t \cdot x} dx$$

Claramente cada $f_n \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$ a la función \tilde{f} dada por $\tilde{f}(x) = \mathcal{F}(\hat{f}(-x))$, luego

$$\begin{aligned} \langle g, \tilde{f} \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, f_n \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{|t| \leq n} \overline{\hat{f}(t)} e^{-2\pi i t \cdot x} dt \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|t| \leq n} \overline{\hat{f}(t)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i t \cdot x} dx \right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|t| \leq n} \hat{g}(t) \overline{\hat{f}(t)} dt = \langle \hat{g}, \hat{f} \rangle = \langle g, f \rangle \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(x)) = \tilde{f}(x) = (\mathcal{F}\hat{f})(-x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

□

Los teoremas (3.3.3) y (3.3.4) conjuntamente son conocidos como el **teorema de Plancherel**.

Vemos que el problema de invertir la TF tiene una simple y elegante solución en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como se hizo para $L^1(\mathbb{R}^n)$, nos podemos preguntar si existe una solución que implica conceptos de sumabilidad.

Por ejemplo, sea $e^{-\delta|x|}$, función de x , es cuadrado integrable, la medida de Abel de la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx$ está bien definida.

Nos podemos preguntar entonces ¿Es verdad que converge a f en $L^2(\mathbb{R}^n)$ o en casi todo punto? La respuesta es afirmativa usando los teoremas descriptos para $L^1(\mathbb{R}^n)$ y usando la extensión en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de la fórmula de multiplicación. Finalmente enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5. *Si f está definida en $L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ como funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y por tanto en casi todo punto. En particular*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

como límite en L^2 .

3.4. La Transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < 2$

Ya hemos definido la TF para funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y para funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$, ahora pensemos en definir la TF sobre la clase $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, que serán todas las funciones $f = f_1 + f_2$ tal que $f_1 \in L^1$ y $f_2 \in L^2$.

Definición 3.4.1. Sea $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^1$ y $f_2 \in L^2$ definimos a \hat{f} como

$$\hat{f} = \widehat{(f_1 + f_2)} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$$

Veamos que la TF de f está bien definida sobre $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$.

Si $g_1 + g_2 = f_1 + f_2$ con $g_i \in L^i(\mathbb{R}^n)$, con $i = 1, 2$ entonces

$$g_1 - f_1 = f_2 - g_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$$

podemos ver que las dos definiciones de la TF coinciden sobre $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, luego

$$\begin{aligned}\hat{g}_1 - \hat{f}_1 &= \hat{f}_2 - \hat{g}_2 \\ \hat{f}_1 + \hat{f}_2 &= \hat{g}_1 + \hat{g}_2\end{aligned}$$

Observemos que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < 2$ se puede descomponer en suma de dos funciones, una en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y otra en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Una manera de hacerlo es la siguiente:

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, el conjunto $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ tiene medida finita, por que de no ser así la integral de $|f|^p$ sería infinita. Luego definimos

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}\end{aligned}$$

donde $f = f_1 + f_2$ luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| dx = \int_E |f(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} (m(E))$$

utilizando la desigualdad de Hölder, luego $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^2 dx = \int_{E^c} |f(x)|^2 dx \leq \int_{E^c} |f(x)|^p dx < \infty$$

ya que $|f(x)| \leq 1$ en E^c y por lo tanto $|f(x)|^2 \leq |f(x)|^p$, luego $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto podemos definir $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ donde $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y la definición no depende de la descomposición. Luego la TF está bien definida sobre $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sabemos que $L^p \subseteq L^1 + L^2$ con $1 < p < 2$, se sigue que la TF está definida para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < 2$.

El problema de inversión de la TF, para estos casos, puede ser visto en término de la medida de Abel o de la medida de Gauss.

Teorema 3.4.1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < 2$ entonces $h = f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Aunque la definición sólo nos dice que la transformada está en $L^1 + L^2$, en realidad existe un resultado más preciso, que dice que \hat{f} está en $L^{p'}$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorema 3.4.2. de Hausdorff- Young Si $f \in L^p$ con $1 < p < 2$ entonces $\hat{f} \in L^{p'}$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

Para poder realizar la demostración de este teorema de manera más sencilla debemos enunciar un teorema de interpolación.

Teorema 3.4.3. de Interpolación de Riez-Thorin Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, con $0 < t < 1$ y p, q tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

si T es un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1} \rightarrow L^{q_0} + L^{q_1}$ tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \quad \forall f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$$

y además

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1} \quad \forall f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$$

entonces

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

Con este resultado demostraremos el teorema de Hausdorff-Young.

Demostración. teorema de Hausdorff-Young
sabíamos que

$$\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$$

$$f \mapsto \hat{f}$$

tal que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$

$$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^\infty$$

$$f \mapsto \hat{f}$$

luego por el teorema de Plancherel $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$

Además para todo $1 < p < 2$ puede escribirse: $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2}$ con $0 < t < 1$.

También $\frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} = \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$

Por lo tanto por el teorema de interpolación de Reiz-Thorin se tiene que:

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

□

Ahora estamos en condiciones de afirmar que es posible definir la TF para funciones en $L^1 + L^2(\mathbb{R}^n)$ y para funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < 2$ gozando de todos los beneficios y propiedades descriptos en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Pero no es posible hacerlo en L^p , si $p > 2$ tan fácilmente. De hecho no toda función en L^p se le puede asignar una transformada de Fourier que sea una función, por lo tanto la definición deberá trabajar con objetos más generales que las funciones que son las llamadas *distribuciones*.

Para ilustrar esta última afirmación, supongamos que si existe $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (para algún $p > 2$), cuya TF, como una distribución, fuera una función; por el teorema de gráfico cerrado se tendría que es valida la siguiente desigualdad

$$\int_{|x| \leq 1} |\hat{f}(x)| dx \leq A \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (3.11)$$

Veamos que esto no se cumple para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tomando $n = 1$ y $f(x) = \frac{e^{-2\pi x^2(1+i\delta)}}{\sqrt{1+i\delta}}$ que por los teoremas antes demostrados tenemos que

$$\hat{f}(x) = e^{-\pi(1+i\delta)x^2}$$

pero

$$\int_{|x| \leq 1} |\hat{f}(x)| dx = A_1$$

$$\|f\|_p = \left(\int_{|x| \leq 1} |\hat{f}(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq A_2 \delta^{2/(p-1)}$$

Si tomamos δ tendiendo a infinito claramente se contradice la desigualdad (3.11) para $p > 2$.

3.5. Conclusión

Revisamos propiedades y resultados de la TF y su inversa, que nos servirán para abordar una resolución sencilla de las EDP en problemas con dominios no acotados. Se pudo observar las condiciones que deben cumplir f y \hat{f} para que $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$ en cada espacio en la que se pudo definir la TF. (por ejemplo **observación 3.2.9**).

Se pudo convertir f en una función continua para más detalles ver **observación 3.2.7**.

En L^2 se mostró que toda función f y su transformada \hat{f} , se la puede aproximar mediante una sucesión de funciones que se anulan fuera de un intervalo acotado.

Finalmente para poder extender la transformada de Fourier en L^p con $p > 2$ vemos la necesidad de trabajar con objetos matemáticos mas generales como las distribuciones, tema que abordaremos en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Distribuciones y Funciones de Test

4.1. Introducción a la Teoría de las Distribuciones

La teoría de las distribuciones nos posibilita el deseo de derivar, *en algún sentido*, funciones que no son derivables. Para conseguirlo, el objetivo es extender el cálculo de las clases de funciones diferenciables a una nueva clase de objetos, *las distribuciones*.

Debemos empezar a ver a las funciones de manera distinta y no como correspondencia entre dos conjuntos. En concreto, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es localmente integrable, esto es, f es medible e integrable en cada subconjunto compacto de \mathbb{R} , podemos ver a f como una funcional lineal que lleva a cada función ϕ en el escalar $\int_{\mathbb{R}} f\phi$, para una conveniente clase de funciones ϕ (*funciones de test*). A ésta clase de funciones la llamamos $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, que es el espacio de funciones indefinidamente derivables con soporte compacto. Con lo cual podemos ver a f como una funcional lineal bien definida en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Por otro lado $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es un subespacio denso en $C_c(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto con la norma uniforme, con lo que el valor del funcional que define f determina la función f salvo un conjunto de medida nula.

Si además $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tenemos, gracias a la fórmula de integración por partes y teniendo en cuenta la compacidad del soporte de ϕ que:

$$\int_{\mathbb{R}} f'\phi = - \int_{\mathbb{R}} f\phi' \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Observando que el segundo miembro de la igualdad tiene sentido aunque f no sea derivable y que nos proporcionan funcionales lineales en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, podemos entender, que para f localmente integrables, la derivada k -ésima de f ha de venir dada por la funcional lineal en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definida por $\phi \mapsto (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f\phi^k$, donde ϕ^k denota la derivada k -ésima de la función ϕ .

Las distribuciones (es la clase de objetos más amplio que el de las funciones diferenciables) van a ser los funcionales lineales en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ que sean continuas para cierta topología, por supuesto localmente convexa y separable, en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Así, si Λ es una distribución, su derivada debería ser igual a:

$$\Lambda'(\phi) = -\Lambda(\phi')$$

Esta somera introducción son los pasos a seguir, que nos da pie a la presentación de definiciones formales.

Observación 4.1.1. Para poder abordar el estudio de las Distribuciones de manera más sólida necesitaremos conceptos y resultados del análisis funcional, por lo cual dejaremos teoremas y proposiciones sin demostración. Sólo demostraremos aquellos que sean relevantes para el presente trabajo.

Definición 4.1.1. Espacio de Fréchet Un espacio de Fréchet es un espacio localmente convexo metrizable y completo.

En adelante n es un número natural fijo y Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Sea K_N una sucesión de compactos cuya unión recubre Ω y tal que K_N esté contenido en el interior de K_{N+1} , diremos que K_N es una sucesión exhaustiva de compactos. Consideremos $C^\infty(\Omega)$, el espacio de funciones de clase C^∞ en Ω con valores complejos, cuya topología es la asociada a la familia de seminormas $\{P_N : N \in \mathbb{N}\}$ dada por:

Definición 4.1.2. Definimos la seminorma como, $P_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$ para todo $f \in C^\infty(\Omega)$ donde $\{K_N\}$ es cualquier sucesión exhaustiva de compactos de Ω .

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$$

es un multi índice, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}(f)}{\partial X^{\alpha_1} \dots \partial X^{\alpha_n}}(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad f \in C^\infty(\Omega)$$

Se puede probar que $C^\infty(\Omega)$ es compacto, con lo cual es un espacio de Fréchet. Recordemos que $\{f_n\} \mapsto f \in C^\infty(\Omega)$ cuando $\{D^\alpha f_n\} \mapsto D^\alpha f$ uniformemente en cada compacto de Ω para todo multi índice α . Por el teorema de Ascoli-Arzelá, destacamos la siguiente propiedad del espacio $C^\infty(\Omega)$, de donde se puede deducir que dicho espacio no es localmente acotado y, por tanto, no normable, en virtud del criterio de normabilidad de Kolmogorov.

Definición 4.1.3. Conjunto Equilibrado Sea E un K -espacio vectorial y sea $A \subset E$. Se dice que A es un conjunto equilibrado si para todo $\lambda \in K$ con $|\lambda| \leq 1$ se tiene que $\lambda A \subset A$.

Teorema 4.1.1. *El espacio $C^\infty(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel, esto es, todo subconjunto cerrado y acotado de $C^\infty(\Omega)$ es compacto.*

Definición 4.1.4. Sea K un subconjunto compacto de Ω ($K \neq \emptyset$). Donde $\mathcal{D}(K)$ es el subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formados por las funciones que se anulan en $\Omega \setminus K$.

$\mathcal{D}(K)$ es un subespacio cerrado $C^\infty(\Omega)$. Dado que la familia de seminormas $\{P_N : N \in \mathbb{N}\}$ es creciente (podemos prescindir de un número finito de ellas sin que esto afecte a la topología asociada), luego tomando N suficientemente grande ($K \subset K_N$) tenemos:

$$P_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K, |\alpha| \leq N\}, \quad \forall f \in \mathcal{D}(K)$$

la topología inducida por $C^\infty(\Omega)$ en $\mathcal{D}(K)$ coincide con la asociada a la sucesión de normas $\{\| \cdot \|_N : N \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{D}(K)$ dada por:

$$\|f\|_N = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K, |\alpha| \leq N\}, \quad \forall f \in \mathcal{D}(K), \quad N \in \mathbb{N}$$

En adelante, $\mathcal{D}(K)$ portará siempre la topología \mathcal{T}_K asociada a dicha sucesión de normas.

Observación 4.1.2. El espacio $\mathcal{D}(K)$ y la topología \mathcal{T}_K no dependen del abierto Ω . De hecho podríamos haber tomado $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Enunciaremos algunas propiedades de $\mathcal{D}(K)$, consecuencia de ser cerrado en $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 4.1.2. *Si K es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , el espacio $\mathcal{D}(K)$ es un espacio de Fréchet con la propiedad de Heine-Borel. Si H es otro compacto de \mathbb{R}^n con $K \subset H$ entonces \mathcal{T}_H induce en $\mathcal{D}(K)$ la topología $\mathcal{T}(K)$ y $\mathcal{D}(K)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{D}(H)$.*

El espacio que realmente nos interesa es el siguiente.

Definición 4.1.5. Una **función de test** en Ω es una función $f \in C^\infty(\Omega)$ de soporte compacto, es decir, tal que $f \in \mathcal{D}(K)$ para algún compacto $K \subset \Omega$.

Denotamos $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio de las funciones de test en Ω que además verifican:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{D}(K_N)$$

donde $\{K_N\}$ es cualquier exhaustión de compactos en Ω .

Ahora presentemos la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$. Observemos que las normas $\|\cdot\|_N$ utilizadas para $\mathcal{D}(K)$ siguen teniendo sentido para $\mathcal{D}(\Omega)$ y generan, por tanto, una topología localmente convexa metrizable en $\mathcal{D}(\Omega)$. El problema es que dicha topología no es completa ya que $\mathcal{D}(\Omega)$ es de primera categoría en sí mismo.

Fue L. Schwartz, padre de la teoría de las distribuciones, quien ideó la topología apropiada del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, que pasamos a definir.

Definición 4.1.6. La familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{W \in \mathcal{D}(\Omega) : W \text{ es convexo, equilibrado y } W \cap \mathcal{D}(K) \in \mathcal{T}_K \text{ para todo compacto } K \subset \Omega\}$$

es una base de entornos de cero para una topología localmente convexa y separable \mathcal{T} en $\mathcal{D}(\Omega)$. Además \mathcal{T} es la familia de todas las uniones de conjuntos de la forma $\phi + W$ donde $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $W \in \mathcal{B}$.

En adelante cualquier referencia topológica al espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ se entenderá respecto de la topología \mathcal{T} .

Observación 4.1.3. Si en la definición de \mathcal{B} sustituimos los compactos de Ω por una sucesión exhaustiva de compactos en Ω obtenemos la misma topología en $\mathcal{D}(\Omega)$.

A continuación daremos algunas propiedades importantes del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 4.1.3. 1. *Un conjunto convexo y equilibrado $V \in \mathcal{D}(\Omega)$ es abierto sí y sólo si $V \in \mathcal{B}$.*

2. *La topología \mathcal{T}_K de todo $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ coincide con la topología de subespacio de $\mathcal{D}(K)$ heredada de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

3. *Si $A \in \mathcal{D}(\Omega)$ es acotado entonces existen $K \in \Omega$ compacto y una sucesión $\{M_N\} \subset \mathbb{R}$ tales que $A \subset \mathcal{D}(K)$ y*

$$\|\phi\|_N \leq M_N \quad \forall \phi \in A, N \in \mathbb{N}$$

4. $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel.

5. Si $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(K)$ verifican

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\phi_n - \phi_m\|_N = 0, \quad N \in \mathbb{N}$$

6. Si $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ es una sucesión con límite cero, entonces existe $K \subset \Omega$ compacto que contiene al soporte de las funciones $\{\phi_n\}$ y para todo multi índice α la sucesión $\{D^\alpha \phi_n\} \rightarrow 0$ uniformemente.

De las propiedades anteriores se desprende la completitud secuencial del espacio de las funciones Test. Pasemos ahora a la completitud de dicho espacio.

También podemos definir de una manera equivalente una topología utilizando un sistema de *filtros*.

Definición 4.1.7. Una familia \mathcal{F} de subconjuntos de Ω se dice que es un *filtro*, si se verifican las siguientes propiedades:

1. $A \subset \Omega$ con $F \subset A$ para algún $F \in \mathcal{F}$ entonces $A \in \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. El conjunto vacío no pertenece a \mathcal{F} .

Definición 4.1.8. Una familia \mathcal{B}' de subconjuntos de Ω se dice que es una *base de filtros*, si se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}'$, existe $B \in \mathcal{B}'$ tal que $B \subset B_1 \cap B_2$.
2. El conjunto vacío no pertenece a \mathcal{B}' .

Si \mathcal{B}' es una base de filtros, la familia

$$\mathcal{F} = \{F \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{B}', B \subset F\}$$

es un filtro, que llamaremos *filtro generado por \mathcal{B}'* .

Definición 4.1.9. Sea E un espacio vectorial topológico (EVT) y M un subconjunto de él. Un filtro \mathcal{F} en M se dice que es de Cauchy si para todo entorno de cero U en E existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset U$ (es decir, si $x, y \in F$ entonces $x - y \in U$).

Primero una observación evidente; si \mathcal{F} es un filtro en un EVT y \mathcal{U} es el filtro de entornos de cero, entonces

$$\mathcal{F} + \mathcal{U} = \{F + U : F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$$

es una base de filtros; si \mathcal{F} es de Cauchy también lo es $\mathcal{F} + \mathcal{U}$, por la continuidad de la suma; si $\mathcal{F} + \mathcal{U}$ converge, también converge \mathcal{F} , ya que $\mathcal{F} + \mathcal{U} \subset \mathcal{F}$.

Teorema 4.1.4. Sea $\{K_N\}$ una sucesión exhaustiva de compactos en Ω y \mathcal{F} un filtro de Cauchy en $\mathcal{D}(\Omega)$. Existe un número natural N tal que

$$(F + U) \cap \mathcal{D}(K_N) \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

para cualquier $F \in \mathcal{F}$ y cualquier entorno de cero $U \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Corolario 4.1.5. *El espacio $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T})$ es completo.*

Observación 4.1.4. Gracias al teorema de Baire obtenemos, en particular, la no metrizable del espacio de las funciones de Test, por ser completo y de primera categoría en si mismo (para ello basta la completitud secuencial).

Del teorema (4.1.3) y de la metrizable del espacio $\mathcal{D}(K)$ veamos algunas características de la continuidad de las aplicaciones lineales que salen de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 4.1.6. Caracterización de las aplicaciones lineales en $\mathcal{D}(\Omega)$. *Sea Y un espacio localmente conexo, separable y $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:*

1. T es continua.
2. T es acotada (transforma acotado en acotados).
3. T es secuencialmente continua.
4. Para cada $K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ compacto, la restricción de T al espacio $\mathcal{D}(K)$ es continua.

Corolario 4.1.7. *Todo operador diferencial D^α es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{D}(\Omega)$ en si mismo.*

Ya estamos en condiciones de dar nombre a los elementos del dual del espacio de las funciones Test.

Definición 4.1.10. Una distribución en Ω es una funcional lineal y continua en $\mathcal{D}(\Omega)$. Denotamos $\mathcal{D}'(\Omega)$ el espacio de las distribuciones en Ω , es decir el dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$.

De la caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales en el espacio de las funciones de Test, nos permite hacer lo propio con las distribuciones.

Corolario 4.1.8. *Sea Λ un funcional lineal de $\mathcal{D}'(\Omega)$, entonces son equivalentes:*

1. Λ es una distribución.
2. Para cada $K \subset \Omega$ compacto existen $N \in \mathbb{N}$ y $C \in \mathbb{R}$ tales que:

$$|\Lambda(\phi)| \leq C \|\phi\|_N \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(K)$$

Ejemplo 4.1.1. funciones. Sea φ una función localmente integrables en Ω , es decir, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible Lebesgue y se tiene $\int_K |\varphi| d\lambda < \infty$ para cualquier compacto $K \subset \Omega$, donde λ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Para $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene $f\varphi \in L^1(\lambda)$, luego podemos definir un funcional lineal Λ_φ en $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\Lambda_\varphi(f) = \int_{\Omega} f\varphi d\lambda \quad (f \in \mathcal{D}(\Omega))$$

Para K compacto y $f \in \mathcal{D}(K)$ se tiene

$$|\Lambda_\varphi(f)| \leq \left(\int_K |\varphi| d\lambda \right) \|f\|$$

luego $\Lambda_\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$. En particular, a cada $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ hemos asociado una distribución Λ_φ .

Ejemplo 4.1.2. Medida. Generalizando lo definido en el ejemplo (4.1.1). Concretamente para el caso que $\varphi \in L^1(\Omega)$. Sea $\mu \in M(\Omega)$, una medida de Borel compleja en Ω y definimos

$$\Lambda_\mu(f) = \int_\Omega f d\mu \quad (f \in \mathcal{D}(\Omega))$$

luego

$$|\Lambda_\mu(f)| \leq |\mu|(\Omega) \|f\| \quad (f \in \mathcal{D}(\Omega))$$

con lo cual $\Lambda_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Como caso particular, se obtiene la distribución que se denomina la medida δ_x , **delta de Dirac en x** , dada por $\delta_x(\phi) = \phi(x)$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ejemplo 4.1.3. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y supongamos

$$\Lambda(f) = f'(0) \quad (f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$$

es inmediato que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Λ no es una función ni tampoco una medida.

Definición 4.1.11. Sea $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y α un multi índice. Se define la **distribución derivada α -ésima de Λ** denotada por $D^\alpha \Lambda$ como

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{4.1}$$

Si f es una función localmente integrable en Ω , se define **la distribución α -ésima de f mediante $D^\alpha f = D^\alpha \Lambda_f$** , también conocida como derivada en sentido de una distribución de f . Se pide comprobar que la igualdad (4.1) define una distribución en Ω .

Si f es una función localmente integrable y la derivada $D^\alpha f$ existe en sentido ordinario tenemos entonces dos posibles definiciones para dicha derivada: $\Lambda_{D^\alpha f}$ y $D^\alpha \Lambda_f$. La fórmula de integración por partes nos da la igualdad de ambas si f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes hasta el orden $|\alpha|$. En caso contrario, hay que exigir la continuidad absoluta de la función f .

El teorema de cierre Steinhaus, nos proporciona la posibilidad de derivar término a término en una sucesión de distribuciones.

Corolario 4.1.9. Sea $\{\Lambda_n\}$ una sucesión de distribuciones en Ω y supongamos que para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(\phi) = \Lambda(\phi)$$

entonces $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y la sucesión $\{D^\alpha \Lambda_n\}$ converge a $D^\alpha \Lambda$ para cada multi índice α , en el espacio de las distribuciones.

Para finalizar este tema partiremos de la convolución de funciones para definir después la convolución de una distribución y una función de clase C^∞ .

Definición 4.1.12. Si u es una función compleja definida en \mathbb{R}^n y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la función $\tau_x u$ y \tilde{u} mediante:

$$\begin{aligned} (\tau_x u)(y) &= u(y - x) \\ \tilde{u}(y) &= u(-y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Para dos funciones complejas u y v definidas en \mathbb{R}^n , en el sentido de Lebesgue. Según la notación anterior, la convolución se puede escribir

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\tau_x \tilde{v})(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

definimos entonces

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \tilde{\phi}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

ya que $\int (\tau_x u)v = \int u(\tau_{-x}v)$ se verifica para funciones u, v se define la traslación $\tau_x u$ para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mediante

$$(\tau_x u)(\phi) = u(\tau_{-x} \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), x \in \mathbb{R}^n$$

la convolución es siempre una función, finalmente daremos algunas propiedades que son muy utilizadas en múltiples aplicaciones, como la más características digamos que la convolución conmuta con las traslaciones y derivaciones y el efecto regularizador de la misma.

Teorema 4.1.10. *Sea u una distribución en \mathbb{R}^n y $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ entonces:*

1. $\tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$
2. $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha(u * \phi) = u * (D^\alpha \phi)$ para todo multiíndice α .
3. $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi.$

4.2. La TF y el Espacio de las Distribuciones Temperadas

En esta sección queremos extender la definición de la Transformada de Fourier al espacio de las distribuciones más concretamente el espacio de las distribuciones temperadas.

Empecemos por considerar el espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, dado $K \subseteq \mathbb{R}^n$, con K compacto definimos:

$$C^\infty(K) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \text{sop}(u) \subseteq K\}$$

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcup \{C^\infty(K), K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ con } K \text{ compacto}\}$$

Ahora veamos cuando una sucesión de funcionales en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ convergen en éste espacio.

Definición 4.2.1. Sea $u_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y sea la sucesión $\{u_j\}_{j \geq 1}$ converge a $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sí y sólo si

1. Existe $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\text{sop}(u_j) \subseteq K, \forall j \geq 1.$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $D^\alpha(u_j)$ converge uniformemente a $D^\alpha(u_0)$ cuando j tiende a ∞ .

Definición 4.2.2. Una funcional lineal y continua $T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es una distribución, denotamos

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \{T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} : T \text{ es una distribución}\}$$

al espacio de todas las distribuciones.

Observación 4.2.1. Definiendo la topología apropiada para $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ compatible con la definición (4.2.1) y denotando al conjunto $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ junto con la topología adecuada (La inducida por la familia de seminormas) luego una sucesión $(u_j)_{j \geq 1}$ definida en este espacio topológico convergerá a u_0 sí y sólo si lo hace en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en el sentido de la definición (4.2.1). La idea básica es considerar funcionales lineales en un espacio de funciones regulares, las llamadas *funciones Test*. En este espacio se comportan bien: la diferenciación, la transformada de Fourier, la convolución, la traslación, la dilatación, etc.

Definamos el soporte de una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definición 4.2.3. El soporte de una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es el menor conjunto cerrado $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que, si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\text{sop}(u) \subseteq K^c$ entonces $\langle T, u \rangle = 0$.

Definición 4.2.4. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la colección de funciones $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y tal que $\sup_x |x^\alpha D^\beta u(x)| < \infty$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se llama **el espacio de Schwartz o el espacio de las funciones Test**.

Observación 4.2.2. ■ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un conjunto no vacío, pues la familia de funciones $\varphi_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|^2}$ pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

- Las funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ son rápidamente decrecientes (en el sentido de que ella y todas sus derivadas decrecen más rápido que la inversa de cualquier polinomio).
- Sean $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty : \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0\}$ tenemos entonces que

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

- Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definimos la seminorma, $p_{\alpha, \beta}(u) = \sup_x |x^\alpha D^\beta u(x)|$, luego $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial topológico.
- Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tendremos que $p_{\alpha, \beta}(u) < \infty$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Definición 4.2.5. Una sucesión $(u_j)_{j \geq 1}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a u_0 si y solo si $p_{\alpha, \beta}(u_j - u_0) \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Definición 4.2.6. Una funcional lineal T sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es continua si $T(u_j) \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ cada vez que $u_j \rightarrow 0$ siempre que $j \rightarrow \infty$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora podemos definir el espacio de las funciones temperadas

Definición 4.2.7. Una funcional lineal y continua sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se llama **distribución temperada**.

La clase formada por todas las distribuciones temperadas se denota $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

A continuación vemos el teorema que nos dice cuando una funcional sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es continua.

Teorema 4.2.1. Una funcional lineal T sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es continua sí y sólo si existe $c > 0$ y $m \in \mathbb{N}_0$ tal que:

$$|\langle T, u \rangle| \leq c \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} p_{\alpha, \beta}(u) \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Podemos enunciar las siguientes observaciones.

Observación 4.2.3. 1. Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene que $u|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2. En general no es cierto que dada una distribución se le puede extender a una distribución temperada.
3. Toda distribución de soporte compacto es una distribución temperada.
4. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
5. Sea $(T_j)_{j \geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $(\langle Tu_j, u \rangle)_{j \geq 1}$ es convergente sí y sólo si existe $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, u \rangle = \langle T, u \rangle \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

6. Cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ se identifica con una distribución temperada T_f definida por

$$\langle T_f, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx \quad \text{con } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Finalmente veamos la **Transformada de Fourier en el espacio de Schwartz** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Para un polinomio $p(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $a_{\alpha} \in \mathbb{R}$ tomamos el operador diferencial asociado a D es decir $P(D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}$.

Si tomamos $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $p(x)u(x)$, podemos considerar $P(D)u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$. Tenemos el siguiente lema.

Lema 4.2.2. Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y P un polinomio, se tiene que:

1. $\widehat{P(D)u}(\xi) = P(2\pi i\xi)\hat{u}(\xi)$.
2. $[P(D)\hat{u}](\xi) = P(-2\pi i\xi)u(x)(\xi)$.

Teorema 4.2.3. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \hat{u} \end{aligned}$$

Es una biyección continua.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, por lo tanto por el teorema anterior ítem 2) tenemos que:

$$(2\pi i\xi)^{\alpha} D^{\beta} \hat{u}(\xi) = (2\pi i\xi)^{\alpha} [\widehat{(-2\pi i x)^{\beta} u(x)}](\xi)$$

y por el mismo lema ítem 1) obtenemos,

$$(2\pi i\xi)^{\alpha} D^{\beta} \hat{u}(\xi) = [D_x^{\alpha} (\widehat{(-2\pi i x)^{\beta} u(x)})](\xi)$$

luego

$$p_{\alpha, \beta}(\hat{u}) = \sup_{\xi} |\xi^{\alpha} D^{\beta} \hat{u}(x)| \leq C_{\alpha, \beta} \left\| D^{\alpha} [\widehat{(-2\pi i x)^{\beta} u}] \right\|$$

se tiene que $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, luego \mathcal{F} está bien definida.

Por otro lado, sabemos que las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto D_x^\alpha((-2\pi i x)^\beta u(x)) \end{aligned}$$

y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$

son continuas, tenemos que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \hat{u} \end{aligned}$$

es continua también.

Ahora veamos que la función \mathcal{F} es biyectiva por el teorema de inversión, si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ luego existe

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x \cdot t} dt$$

en casi todo punto de x .

Como $u, \hat{u} \in \mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces se debe cumplir

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(u) = u$$

y

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \hat{u}$$

donde

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{u})(\xi) = \mathcal{F}(u)(-\xi)$$

luego

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \hat{u} \end{aligned}$$

resulta ser una aplicación biyectiva. □

Ahora definimos:

Definición 4.2.8. Dada una distribución $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definimos su transformada de Fourier \hat{T} como

$$\langle \hat{T}, u \rangle = \langle T, \hat{u} \rangle \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Por el teorema anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \langle T, \hat{u} \rangle \end{aligned}$$

es continua y por lo tanto $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Observación 4.2.4. Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que:

1. $\widehat{D^\alpha(T)} = (2\pi ix)^\alpha \hat{T}, \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$
2. $D^\alpha \hat{T} = [\widehat{(-2\pi ix)^\alpha T}], \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\langle \hat{\delta}_a, u \rangle = \langle \delta_a, \hat{u} \rangle = \hat{u}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2iax} u(x) dx \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

luego se tiene que $\hat{\delta}_a = e^{-2\pi i a x}$

Observación 4.2.5. Puesto que el operador $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es sobreyectivo y como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es también sobreyectivo.

Concluimos este capítulo con el siguiente teorema.

Teorema 4.2.4. *La transformada de Fourier es una aplicación lineal, biyectiva y continua de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con inversa continua.*

Sabemos que $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, o sea que toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, define una distribución en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

En consecuencia tiene sentido $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Si para $R > 0$ se tiene que $f_R(x) = \chi_{B(0,R)}(x)f(x)$. Entonces $\lim_{R \rightarrow \infty} f_R(x) = f(x)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y por el teorema anterior tenemos que $\lim_{R \rightarrow \infty} \hat{f}_R(x) = \hat{f}(x)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Como cada $f_R(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B(0,R)} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

4.3. Conclusión

Extendimos la definición de función a una distribución de manera que se pueda definir la derivada de una distribución usando la derivabilidad de una función conocida. Esto nos permite derivar funciones que en el sentido clásico no son derivables, por ejemplo las funciones que no son continuas.

Podemos decir que una función f es derivable en sentido amplio aplicando lo siguiente

$$\langle f', \varphi \rangle = \langle f, \varphi' \rangle$$

Se definió funciones temperadas.

Se introdujo la definición de la TF al espacio de funciones temperadas y se demostró que dicha aplicación es sobreyectiva en este espacio. Además como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es importante la **observación 4.2.5.**

Con estos nuevos conceptos debilitamos la convergencia en el e.v.t, ya no hablamos de convergencia uniforme ni de convergencia puntual sino de convergencia mediante el producto escalar ver ítem 5 de la **observación 4.2.3**, ni tampoco sucesionalmente continua implica continuidad como en los espacio métricos y espacios normables.

Capítulo 5

La Transformada de Fourier Aplicada a problemas de contornos no acotados

5.1. Aplicaciones de la transformada de Fourier a las EDP

En este capítulo nos ocuparemos de una de las herramientas más utilizadas para resolver problemas procedentes de campos tan distintos como pueden ser la Teoría de Circuitos, la Elasticidad Lineal, la Transmisión de Calor o la Propagación de Ondas. Nos referimos a la Transformada de Fourier (\mathcal{F}). La idea básica del uso de las transformadas integrales (no sólo de Fourier sino de otras transformadas como la de Laplace, la de Hilbert, la de Hankel, la de Mellín o la transformada Zeta) consiste en lo siguiente: supongamos que estamos estudiando un determinado fenómeno físico que describimos por medio de un modelo matemático. Dicho modelo estará formado por una o varias ecuaciones diferenciales (ordinarias o en derivadas parciales) con sus correspondientes condiciones iniciales y/o de contorno. El problema consiste en resolver dicho modelo matemático, es decir, resolver una ecuación diferencial. Es ahora cuando intervienen las transformadas integrales, en particular la transformada de Fourier, para transformar dicha ecuación diferencial en otra ecuación (algebraica o también diferencial), la cual va a resultar más fácil de resolver que la ecuación diferencial de partida. De esta forma transformamos nuestro problema original complicado en un problema más sencillo. Resolvemos el problema transformado y luego calculamos la transformada inversa de la solución del problema transformado bajo la suposición, claro está, de que esta solución inversamente transformada sea la solución de nuestro problema original. En bastantes casos, esta suposición se convierte en realidad y conseguimos, por este procedimiento, resolver nuestro problema original. Esquemáticamente, lo que estamos diciendo se puede ver en la figura (5.1).

La transformada de Fourier está especialmente indicada para resolver EDP donde el dominio espacial es todo \mathbb{R} (dominios no acotados). Consideremos, por ejemplo, el problema de difusión del calor (PC) en un alambre *infinito*, supuesta conocida la temperatura inicial en cada punto

$$(PC) \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 & \text{Ec. de Calor} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} & \text{Condición inicial} \end{cases}$$

Supondremos que todas las funciones que aparecen, verifican las hipótesis necesarias para que tengan sentido los cálculos que vamos a llevar a cabo.

Si recordamos el **teorema (3.2.7)**, tomando $n = 1$ podemos enunciar la siguiente proposición.

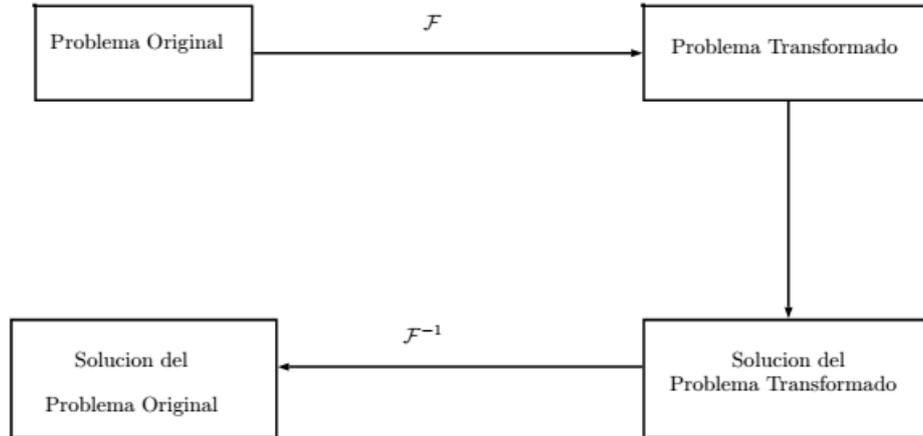


Figura 5.1: Esquema práctico.

Proposición 5.1.1. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, con $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f') &= 2\pi ix\mathcal{F}(f) \\ \mathcal{F}(f'') &= -4\pi^2 x^2 \mathcal{F}(f) \\ \mathcal{F}(f^n) &= (2\pi ix)^n \mathcal{F}(f)\end{aligned}$$

La demostración es sencilla utilizando el teorema antes mencionado junto al método de inducción sobre el orden de derivación de f .

Volviendo al problema de de difusión del calor (PC), aplicamos la transformada de Fourier respecto de la variable x , llamando

$$U(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-2\pi ix\xi} dx$$

y utilizando la proposición (5.1.1), se obtiene

$$(PVI) \begin{cases} U_t(\xi, t) - (-4\pi^2 \xi^2)U(\xi, t) = 0 & \xi \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(\xi, 0) = \mathcal{F}(f)(\xi) & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Fijado ξ , la EDP anterior podemos resolverla como una EDO lineal de primer orden, por métodos ya conocidos (separación de variables), por lo que integrando resulta

$$U(\xi, t) = C e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$$

Para poder determinar la constante C utilizamos las condiciones iniciales $C = U(\xi, 0) = C e^{-4\pi^2 \xi^2 0} = \mathcal{F}(f)(\xi)$, luego la solución (PVI) está dado por

$$U(\xi, t) = \mathcal{F}(f)(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$$

Queremos ahora aplicar transformada inversa tomando t constante y obtener la solución del problema (PC).

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t} e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

Otra forma de expresar la solución del (PC) es usando la definición del producto convolución del capítulo 3 y en virtud del teorema (3.2.4) $(f * g)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$ tomamos $\hat{g}(\xi) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t} \in S(\mathbb{R})$ con t constante y por el corolario (3.2.19) luego

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

se sigue

$$u(x, t) = f(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

La función

$$E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

es el **núcleo gaussiano** descrito en el capítulo 3, que juega un papel destacado a la hora de resolver la Ec. del Calor (de hecho, se le suele llamar por ello **solución fundamental de la Ec. del Calor**). Consideremos ahora el siguiente problema elíptico en un semiplano

$$(PD) \begin{cases} u_{yy}(x, y) + u_{xx}(x, y) = 0 & x \in \mathbb{R}, y > 0 \quad \text{Ec. de Laplace} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \quad \text{Condición de contorno} \end{cases}$$

La primera observación es que si $u(x, y)$ es una solución de este problema, entonces $u(x, y) + Cy$ también lo es para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$. Con el fin de quedarnos con una única solución, vamos a determinar aquella que está acotada cuando $y \rightarrow +\infty$. De nuevo, vamos a suponer que estamos en condiciones de poder llevar a cabo todos los cálculos que siguen.

Aplicando transformada de Fourier respecto de la variable x , llamando

$$U(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}} u(x, y) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

y utilizando la proposición (5.1.1), sobre la transformada de la derivada segunda respecto de x , se obtiene como antes

$$\begin{cases} U_{yy}(\xi, y) - 4\pi^2 \xi^2 U(\xi, y) = 0 & \xi \in \mathbb{R}, y > 0 \\ U(\xi, 0) = \mathcal{F}(f)(\xi) & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Fijado ξ , la EDP anterior podemos resolverla como si fuera una EDO lineal de segundo orden, por lo que integrando se llega a

$$U(\xi, y) = c_1 e^{2\pi \xi |y|} + c_2 e^{-2\pi \xi |y|}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Como queremos que $u(x, y)$ esté acotada cuando $y \rightarrow \infty$, también debe estarlo $U(\xi, y)$, luego $c_1 = 0$. Por otro lado, utilizando la condición inicial, concluimos que $c_2(\xi) = U(\xi, 0) = \mathcal{F}(f)(\xi)$, por lo que finalmente

$$U(\xi, y) = \mathcal{F}(f)(\xi) e^{-2\pi \xi |y|}$$

Ahora aplicamos transformada inversa tomando y constante y obtenemos la solución del problema (PD).

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-|2\pi\xi|y} e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

De manera similar al que se realizó con el problema (PC) expresemos el resultado utilizando el producto convolución (respecto de la variable x).

Tomamos $\hat{g}(\xi) = e^{-|2\pi\xi|y}$ con y constante, por el corolario (3.2.19) luego

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(\xi) = c_n \frac{y}{y^2 + x^2}$$

se sigue

$$u(x, y) = f(x) * c_n \frac{y}{y^2 + x^2} = c_n \int_{\mathbb{R}} f(x - z) \frac{y}{z^2 + y^2} dz$$

La función

$$P(x, y) = c_n \frac{y}{y^2 + x^2}$$

es el **núcleo de Poisson** descrito en el capítulo 3.

5.2. La Delta de Dirac

En general, las magnitudes físicas tienen una naturaleza distribuida, es decir, están definidas sobre un cierto dominio espacial ó en cada instante de un cierto intervalo temporal. Esta regla tiene excepciones: existen sistemas con parámetros, acciones o condiciones iniciales que están localizados en partes muy reducidas (casi puntuales) del dominio. Por ejemplo, una carga concentrada en una sección muy pequeña de una viga o una fuente térmica localizada en una zona también muy pequeña. Existen también procesos en los que se ejercen acciones con valores significativos únicamente en intervalos de tiempo muy cortos, como fuerzas producidas por impactos y aportaciones de calor u otras magnitudes en forma impulsiva (*chispazos*, destellos, etc). Surge así la necesidad de representar en un mismo esquema tanto variables distribuidas en el espacio y el tiempo como concentradas únicamente en puntos o instantes de tiempo específicos. Pensemos, por ejemplo, en la acción de una fuerza *instantánea*. Supongamos que un cuerpo de masa unidad, en reposo en el instante inicial $t = 0$, experimenta la acción de una fuerza impulsiva en un instante $t_0 > 0$, que le comunica una velocidad $v = 1$, después de lo cual la acción de la fuerza termina. Nos interesa determinar la fuerza $F(t)$ que actuó sobre el cuerpo en el instante t . Según la Segunda Ley de Newton, si $a(t)$ designa la aceleración del cuerpo en el instante t

$$F(t) = a(t) \tag{5.1}$$

En este caso,

$$a(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

dado que la velocidad del cuerpo es constante todo el tiempo, salvo en $t = t_0$, donde pasa de valer 0 a valer 1 instantáneamente. Desde el punto de vista clásico, es evidente que la expresión que resulta no tiene sentido matemático, ya que no existe una función de t así definida.

Aún más, si integramos formalmente la expresión (5.1) entre 0 y $\tau > t_0$, teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada de la velocidad, resulta que

$$\int_0^\tau F(t)dt = v(t) - v(0) = 1$$

donde $v(t)$ designa la velocidad del cuerpo en el instante t . De nuevo, es fácil darse cuenta que la igualdad anterior no tiene sentido clásico: como $F(t) = 0$ cuando $t \neq t_0$, la integral que figura en el término de la izquierda es igual a cero, mientras que el segundo miembro no lo es. A partir de los razonamientos físicos, cabría esperar que dichas igualdades tuvieran algún sentido. Estas aparentes contradicciones se pueden superar mediante una nueva noción matemática: las distribuciones o funciones generalizadas.

Sin duda, la distribución más conocida es la Delta de Dirac. Este ente matemático fue manejado con gran habilidad por Oliver Heaviside a finales del siglo XIX y ha sido usado por los físicos desde 1920. En particular, fue utilizado sistemáticamente por el físico teórico inglés Paul A. M. Dirac en su libro *Principios de Mecánica Cuántica*, obteniendo muchas de las propiedades que veremos más adelante. Dirac ganó el Premio Nobel en 1933 por su trabajo sobre la formulación teórica de la mecánica cuántica. Pero, para los matemáticos la Delta de Dirac era una monstruosidad: Heaviside fue atacado y muchos de sus trabajos no fueron aceptados para su publicación por los editores de revistas alegando falta de rigor matemático, a lo que él respondía: *¿Debería renunciar a mi cena porque no entiendo completamente el proceso de la digestión?*. Entre 1945 y 1948, Laurent Schwartz publicó una serie de artículos exponiendo una teoría matemáticamente coherente y completa de esta nueva herramienta, lo que le valió la Medalla Fields en 1950. De manera independiente, la escuela rusa (I. M. Gelfand, G. E. Shilov, S. L. Sobolev) también trabajó en el mismo campo, por lo cual está considerada igualmente responsable de esta nueva teoría. En la actualidad, el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales no puede entenderse fuera del ámbito de las distribuciones.

Según acabamos de ver, intuitivamente, la Delta de Dirac en el punto t_0 (que se suele representar por $\delta(t - t_0)$) debe verificar

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

Por supuesto, no existe una función tal entre las clásicas, pero si es posible definir una *función generalizada ó distribución* como límite de la siguiente familia de funciones clásicas: si $\varepsilon > 0$,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

Se puede comprobar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

El uso de este procedimiento no es una novedad en matemáticas: por ejemplo, ha sido utilizado para construir los números reales a partir de los números racionales (*todo número real es límite de una sucesión de números racionales*). Paul Dirac utilizó esta técnica para trabajar con la Delta y definir sobre ella diversas operaciones de interés. Por ejemplo, la integral: teniendo en cuenta que para cada $\varepsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t)dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$$

así definió

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t) dt = 1$$

tal y como precisamos en el caso de la fuerza *instantánea*. De la misma forma, para cada función $\psi(t)$ continua en t_0

$$\int_b^a \delta(t - t_0) \psi(t) dt \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_b^a f_\varepsilon(t) \psi(t) dt = 0 \quad \text{si } t_0 \notin (a, b)$$

$$\int_b^a \delta(t - t_0) \psi(t) dt \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_b^a f_\varepsilon(t) \psi(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \psi(t) dt = \psi(t_0) \quad \text{si } t_0 \in (a, b)$$

gracias al Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral.

Existen muchas otras familias de funciones clásicas que pueden ser utilizadas para definir la Delta de Dirac en un punto t_0 , en diferentes situaciones según convenga. Algunos ejemplos son:

I) $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|t-t_0|}{\varepsilon}}$

II) $f_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{\pi((t-t_0)^2 + \varepsilon^2)}$

III) $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi(t-t_0)} \operatorname{sen}\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right)$

IV) $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\varepsilon}}$

Comprobemos, por ejemplo, la familia I) define la Delta de Dirac: en primer lugar, se observa que

$$f_\varepsilon(t_0) = \frac{1}{2\varepsilon} \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

y si $t \neq t_0$, no es difícil comprobar que

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

Además, haciendo el cambio de variable $y = (t - t_0)/\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t) \psi(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|t-t_0|}{\varepsilon}} \psi(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y|}}{2} \psi(t_0 + \varepsilon t) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y|}}{2} \psi(t_0) dy = \psi(t_0) \int_0^{+\infty} e^{-|y|} dy = \psi(t_0) \end{aligned}$$

De manera similar se puede comprobar para el resto.

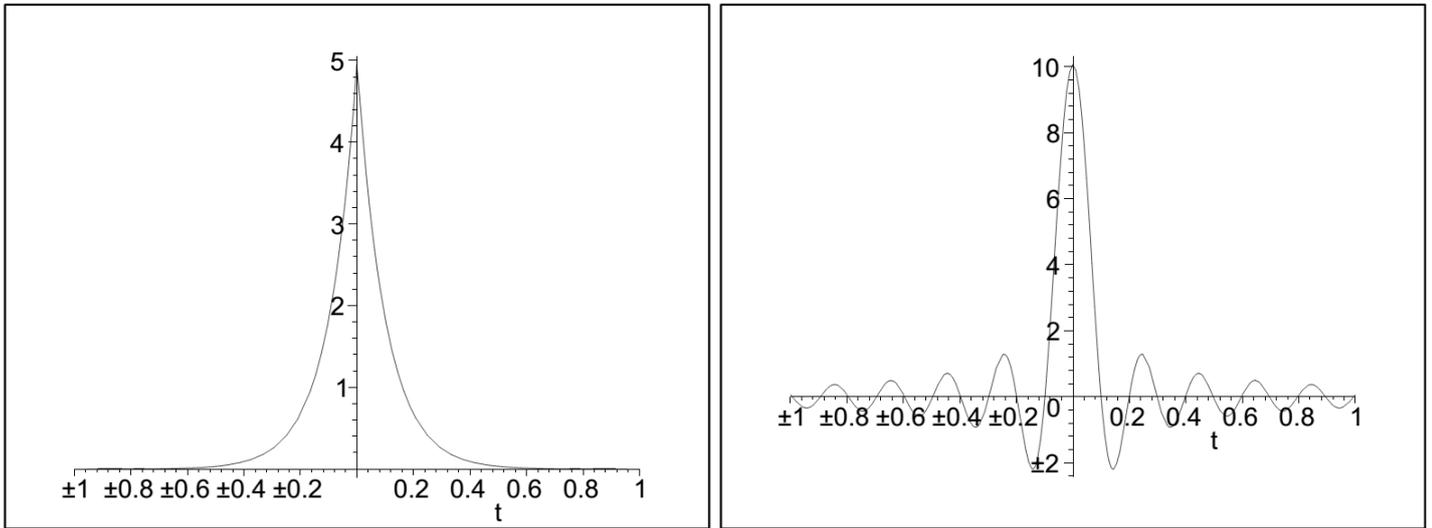


Figura 5.2: Dos aproximaciones diferentes de la Delta de Dirac en el origen.

5.2.1. Extensión del concepto de derivada

Veamos ahora cómo se puede extender la noción de derivada para que sea aplicable a las distribuciones ó funciones generalizadas como la Delta de Dirac, pero de manera que siga coincidiendo con la noción habitual sobre las funciones conocidas. Para ello se utiliza la siguiente idea: supongamos que tenemos dos funciones regulares f y φ de clase C^1 en el intervalo (a, b) . En virtud de la fórmula de integración por partes, sabemos que se verifica

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt$$

Si la función φ verifica además que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, resulta que

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt = - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt \quad (5.2)$$

Notemos que el término de la izquierda de la expresión (5.2) solamente tiene sentido si f es regular. Sin embargo, el término de la derecha tiene sentido, aunque f no sea derivable en el sentido clásico (por ejemplo, es válido si f es continua a trozos en $[a, b]$). Teniendo este hecho en cuenta, introducimos la siguiente definición

Definición 5.2.1. Dada f una función (clásica o generalizada) en $[a, b]$, se define la derivada primera de f (en el sentido de las distribuciones) como la aplicación lineal

$$f' : \mathcal{D}(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\int_b^a f'(t)\varphi(t)dt \stackrel{def}{=} - \int_b^a f(t)\varphi'(t)dt$$

donde

$$\mathcal{D}(a, b) = \{\varphi \in C^\infty(a, b) : \text{sop}(\varphi) = (a, b)\}$$

siempre y cuando la integral de la derecha esté bien definida para cada $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$.

Observación 5.2.1. Notemos que en la definición anterior estamos cometiendo un abuso de lenguaje al escribir $\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt$, aún cuando esta expresión (en principio) sólo tiene sentido para funciones regulares. Para ver una definición más apropiada y un estudio más profundo de las distribuciones podremos ver el **capítulo 4**. En tal caso podremos considerar las φ como funciones de soporte compacto.

Ejemplo 5.2.1. Para empezar, vamos a calcular la derivada en el sentido de las distribuciones de la **función de Heaviside $\mathbf{H}(t)$** dada por

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Eligiendo, por ejemplo, el intervalo de trabajo $(a, b) = (-1, 1)$, resulta que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$

$$\int_{-1}^1 H'(t)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{-1}^1 H(t)\varphi'(t)dt = - \int_0^1 \varphi'(t)dt = \varphi(0) - \varphi(1) = \varphi(0)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta lo que conocemos sobre la Delta de Dirac en el origen ($t_0 = 0$), sabemos que

$$\int_{-1}^1 \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

luego concluimos que

$$\int_{-1}^1 H'(t)\varphi(t)dt = \int_{-1}^1 \delta(t)\varphi(t)dt$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$. Se dice entonces que la derivada (en el sentido de las distribuciones) de la función de Heaviside coincide con la Delta de Dirac en el origen, es decir, $H'(t) = \delta(t)$.

Ejemplo 5.2.2. Dada la función

$$f_1(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{si } t \in (0, 1) \\ t^2 & \text{si } t \in [1, 2) \end{cases}$$

sabemos que es derivable (en el sentido clásico) en todos los puntos, salvo en $t = 1$ donde es discontinua. Vamos a calcular ahora su derivada en el sentido de las distribuciones. En este caso, tomando $(a, b) = (0, 2)$, por definición, tenemos que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, 2)$

$$\int_0^2 f_1'(t)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^2 f_1(t)\varphi'(t)dt = \int_0^1 t^2\varphi'(t)dt - \int_1^2 t^2\varphi'(t)dt$$

Integrando por partes en cada integral y usando que $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$, resulta

$$\int_0^2 f_1(t)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} t^2\varphi(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 2t\varphi(t)dt - t^2\varphi(t) \Big|_1^2 + \int_1^2 2t\varphi(t)dt =$$

$$2\varphi(1) - \int_0^1 2t\varphi(t)dt + \int_1^2 2t\varphi(t)dt = 2 \int_0^2 \delta(t-1)\varphi(t)dt + \int_0^2 g_1(t)\varphi(t)dt$$

donde

$$g_1(t) = \begin{cases} -2t & \text{si } t \in (0, 1) \\ 2t & \text{si } t \in (1, 2) \end{cases}$$

finalmente tenemos que

$$f'_1 = 2\delta(t-1) + g_1(t).$$

Es decir, la derivada de f_1 en el sentido de las distribuciones viene dada por la suma de g_1 (derivada de f_1 en el sentido clásico en los puntos donde existe) más la Delta de Dirac en $t = 1$ (porque ése es el punto donde f_1 posee una discontinuidad de salto finito) multiplicada por 2 (porque ése es el salto de f_1 en $t = 1$)

Observación 5.2.2. I) En general, es posible utilizar la misma técnica del ejemplo anterior para demostrar que para cada función f de clase C^1 a trozos en un intervalo (a, b) , se verifica que la derivada de f en el sentido de las distribuciones viene dada por

$$f'(t) = (f(t_1^+) - f(t_1^-))\delta(t - t_1) + \dots + (f(t_n^+) - f(t_n^-))\delta(t - t_n) + g(t)$$

siendo t_1, \dots, t_n los puntos de (a, b) donde f presenta discontinuidades de salto finito y

$$g(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{si } t \in (a, t_1) \\ f'(t) & \text{si } t \in (t_1, t_2) \\ \dots & \\ f'(t) & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n) \\ f'(t) & \text{si } t \in (t_n, b) \end{cases}$$

donde $f'(t)$ designa la derivada de f en el sentido clásico en los puntos donde existe. Para verlo, basta integrar por partes en cada subintervalo donde la función f es derivable.

- II) Por supuesto, en los casos en que f es $C^1(a, b)$, su derivada en el sentido de las distribuciones coincide con la derivada clásica, ya que al no tener f discontinuidades las Deltas de Dirac no aparecen.
- III) Una propiedad interesante de la derivación en el sentido de las distribuciones es que sigue siendo una operación lineal, esto es, la derivada de la suma es la suma de las derivadas y la derivada de una función multiplicada por una constante, viene dada por la constante multiplicada por la derivada de la función. Ahora combinando los ejemplos (5.2.1)-(5.2.2) y podemos concluir que la derivada en el sentido de las distribuciones de $5H(t) + 7f_1(t)$ viene dada por $5\delta(t) + 14\delta(t-1) + 7g_1(t)$.
- IV) Otra cuestión muy interesante de la nueva noción es que puede aplicarse a funciones generalizadas, como por ejemplo, la propia Delta de Dirac en un punto, obteniéndose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t-t_0)\varphi(t)dt \stackrel{def}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\varphi'(t)dt = -\varphi'(t_0).$$

luego $\delta'(t_0) = -\varphi'(t_0)$

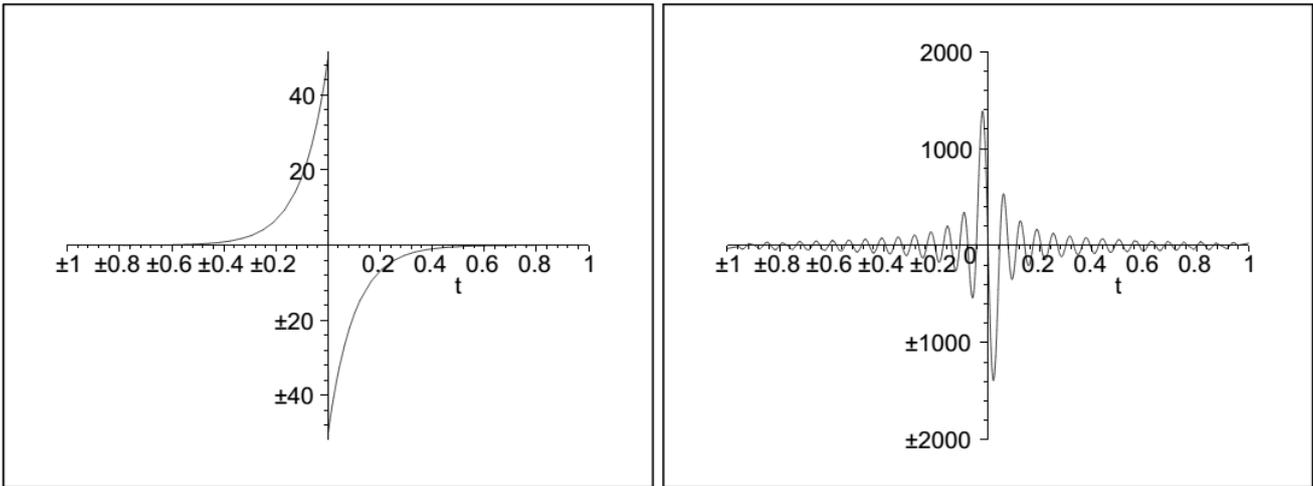


Figura 5.3: Dos aproximaciones diferentes de la Delta de Dirac en el origen.

Como ya vimos en el capítulo 4 es posible obtener la derivada n -ésima de una distribución y usando la definición (4.1.11) para nuestro caso particular obtenemos la siguiente definición.

Definición 5.2.2. Dada f una función (clásica o generalizada) en $[a, b]$, se define la derivada n -ésima de f (en el sentido de las distribuciones) como la aplicación lineal

$$f^n : \mathcal{D}(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\int_b^a f^n(t)\varphi(t)dt \stackrel{def}{=} (-1)^n \int_b^a f(t)\varphi^n(t)dt$$

siempre y cuando la integral de la derecha esté bien definida para cada $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$.

Observación 5.2.3. I) Teniendo en cuenta que las funciones φ son de clase C^∞ y, por lo tanto, derivables infinitas veces, una conclusión muy importante de las definiciones anteriores es que las distribuciones (o funciones generalizadas) se pueden derivar infinitas veces en el sentido de las distribuciones.

II) Por ejemplo, podemos derivar la Delta de Dirac tantas veces como queramos, obteniendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^n(t - t_0)\varphi(t)dt \stackrel{def}{=} (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\varphi^n(t)dt = (-1)^n \varphi^n(t_0).$$

III) Combinando los resultados anteriores y volviendo a los ejemplos (5.2.1)-(5.2.2) se pueden comprobar sin mucha dificultad las identidades siguientes:

$$H''(t) = \delta'(t), \dots, H^n(t) = \delta^{n-1}(t)$$

$$f_1''(t) = 2\delta'(t - 1) + 4\delta(t - 1) + g_2(t)$$

con

$$g_2(t) = \begin{cases} -2 & \text{si } t \in (0, 1) \\ 2 & \text{si } t \in (1, 2) \end{cases}$$

$$f_1'''(t) = 2\delta''(t-1) + 4\delta'(t-1) + 4\delta(t-1)$$

y si $n \geq 4$

$$f_1^n(t) = 2\delta^{n-1}(t-1) + 4\delta^{n-2}(t-1) + \dots + 4\delta(t-1)$$

5.2.2. Transformada de Fourier y la Delta de Dirac

Uno de los temas centrales de la teoría de distribuciones desarrollada por Schwartz es ampliar el uso de la Transformada de Fourier a distribuciones y funciones clásicas que no cumplen los requisitos vistos en el Capítulo 3. Veamos cómo hacerlo, a partir de las definiciones vistas allí, entendidas en el sentido generalizado del apartado anterior:

a) $\mathcal{F}(\delta(t-\alpha))(\xi) = e^{-i2\pi\xi\alpha}$. Tomando $\alpha = 0$ resulta que, $\mathcal{F}(\delta(t))(\xi) = 1$

$$\mathcal{F}(\delta(t-\alpha))(\xi) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} \delta(t-\alpha)e^{-i2\pi\xi t} dt = e^{-i2\pi\xi\alpha} \quad (5.3)$$

b) $\mathcal{F}(\delta'(t-\alpha))(\xi) = 2\pi\xi i e^{-i2\pi\xi\alpha}$. Tomando $\alpha = 0$ resulta que, $\mathcal{F}(\delta'(t))(\xi) = 2\pi\xi i$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta'(t-\alpha))(\xi) &\stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} \delta'(t-\alpha)e^{-i2\pi\xi t} dt \stackrel{def}{=} - \int_{\mathbb{R}} \delta(t-\alpha) \frac{d}{dt}(e^{-i2\pi\xi t}) dt \\ &= 2\pi\xi i \int_{\mathbb{R}} \delta(t-\alpha)e^{-i2\pi\xi t} dt = 2\pi\xi i e^{-i2\pi\xi\alpha} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Análogamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se obtiene la expresión $\mathcal{F}(\delta^n(t-\alpha))(\xi) = (2\pi\xi i)^n e^{-i2\pi\xi\alpha}$. Tomando $\alpha = 0$, resulta que $\mathcal{F}(\delta^n(t))(\xi) = (2\pi\xi i)^n$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta^n(t-\alpha))(\xi) &\stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} \delta^n(t-\alpha)e^{-i2\pi\xi t} dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \delta(t-\alpha) \frac{d^n}{dt^n}(e^{-i2\pi\xi t}) dt \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} (-2\pi\xi i)^n \delta(t-\alpha)e^{-i2\pi\xi t} dt = (2\pi\xi i)^n e^{-i2\pi\xi\alpha} \end{aligned} \quad (5.5)$$

c) Con la misma filosofía, $\mathcal{F}^{-1}(\delta(\xi-\alpha))(t) = e^{2\pi i t \alpha}$, o equivalentemente, $\mathcal{F}(e^{2\pi i t \alpha})(\xi) = \delta(\xi-\alpha)$.

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\xi-\alpha))(t) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi-\alpha)e^{i2\pi t \xi} d\xi = e^{i2\pi t \alpha} \quad (5.6)$$

En particular, haciendo $\alpha = 0$, se llega a $\mathcal{F}^{-1}(\delta(\xi))(t) = 1$ ó $\mathcal{F}(1)(\xi) = \delta(\xi)$. Usando la expresión integral de la Transformada de Fourier, estas identidades se pueden expresar como

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t(\xi-\alpha)} dt = \delta(\xi-\alpha) \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t(\xi)} dt = \delta(\xi)$$

d) $\mathcal{F}^{-1}(\delta'(\xi - \alpha))(t) = -2\pi it e^{2\pi i t \alpha}$ ó $\mathcal{F}(t e^{i2\pi t \alpha})(\xi) = \frac{i}{2\pi} \delta'(\xi - \alpha)$. En particular, con $\alpha = 0$ $\mathcal{F}^{-1}(\delta'(\xi))(t) = -2\pi it$ ó $\mathcal{F}(t)(\xi) = \frac{i}{2\pi} \delta'(\xi)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\delta'(\xi - \alpha))(t) &\stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} \delta'(\xi - \alpha) e^{i2\pi \xi t} d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi - \alpha) \frac{d}{d\xi} (e^{i2\pi t \xi}) d\xi = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi - \alpha) 2\pi i t e^{i2\pi t \xi} d\xi = -2\pi i t e^{i2\pi t \alpha} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Análogamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se deduce la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\delta^n(\xi - \alpha))(t) &= (-2\pi i t)^n e^{i2\pi t \alpha} \text{ ó } \mathcal{F}(t^n e^{i2\pi t \alpha})(\xi) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \delta^n(\xi - \alpha) \quad (5.8) \\ \mathcal{F}^{-1}(\delta^n(\xi - \alpha))(t) &\stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} \delta^n(\xi - \alpha) e^{i2\pi \xi t} d\xi = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi - \alpha) \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{i2\pi t \xi}) d\xi = \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi - \alpha) (2\pi i t)^n e^{i2\pi t \xi} d\xi = (-2\pi i t)^n e^{i2\pi t \alpha} \end{aligned}$$

Nuevamente, considerando el caso particular $\alpha = 0$, llegamos a que

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta^n(\xi))(t) = (-2\pi i t)^n \text{ ó } \mathcal{F}(t^n)(\xi) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \delta^n(\xi)$$

Usando la linealidad, podemos obtener entonces la Transformada de Fourier (generalizada) de cualquier polinomio:

$$\mathcal{F}(a + a_1 t + \dots + a_n t^n)(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \delta^k(\xi) \quad (5.9)$$

5.2.3. Otras Propiedades de la Delta de Dirac

1. Para cada función $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, se verifica $\phi(t)\delta(t - t_0) = \phi(t_0)\delta(t - t_0)$. En particular, $\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$ y $(t - t_0)^n \delta(t - t_0) = 0$, si $n > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\delta(t - t_0)\varphi(t)dt = \phi(t_0)\varphi(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t_0)\delta(t - t_0)\varphi(t)dt.$$

Tomando $t_0 = 0$, se tiene por ejemplo que $t\delta(t) = 0$, lo cual resulta sorprendente, porque la única solución clásica de la ecuación $tx(t) = 0$ es $x(t) = 0$, mientras que en el espacio de las distribuciones tendríamos infinitas soluciones de la forma $x(t) = C\delta(t)$, para cada $C \in \mathbb{R}$.

2. Para cada función $\phi \in C(\mathbb{R})$, se verifica $\delta(t - t_0) * \phi(t) = \phi(t) * \delta(t - t_0) = \phi(t - t_0)$. En particular, $\delta(t) * \phi(t) = \phi(t) * \delta(t) = \phi(t)$, es decir, la Delta de Dirac en el origen es el elemento neutro para el producto de convolución

$$(\delta(t - t_0) * \phi(t))(s) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t - s - t_0)\phi(s)ds = \phi(t - t_0)$$

$$(\phi(t) * \delta(t - t_0))(s) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t - s)\delta(s - t_0)ds = \phi(t - t_0)$$

Notemos además que si $t_0 \geq 0$ y $\phi(t) = 0$ para cada $t < 0$, se verifica

$$\delta(t - t_0) * \phi(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0) & \text{si } t \geq t_0 \\ 2t & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

3. Se verifica la identidad

$$t\delta'(t) = -\delta(t)$$

ya que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$, se satisface

$$\int_{-1}^1 t\delta'(t)\varphi(t)dt = - \int_{-1}^1 \delta(t)(t\varphi(t))'dt = - \int_{-1}^1 \delta(t)(\varphi(t) + t\varphi'(t))dt = -\varphi(0) = - \int_{-1}^1 \delta(t)\varphi(t)dt$$

5.2.4. Series de Fourier y la Delta de Dirac

Para empezar, podemos utilizar las expresiones vistas en el Capítulo 2 (ver (2.20)-(2.21)) para obtener el desarrollo en serie de Fourier de la Delta de Dirac en un punto $t = t_0 \in (-\pi, \pi)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t - t_0) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \cos(nt_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t - t_0) \operatorname{sen}(nt) dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(nt_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.11)$$

de donde se llega a la identidad

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(nt_0) \cos(nt) + \operatorname{sen}(nt_0) \operatorname{sen}(nt)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(t - t_0)), \quad t \in (-\pi, \pi) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Notemos que los coeficientes a_n y b_n no verifican (en general) la propiedad de tender hacia 0 cuando $n \rightarrow \infty$, porque la Desigualdad de Bessel deja de tener sentido en este contexto.

Como consecuencia de (5.12) extendida por periodicidad, se llega a que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - (t_0 + 2k\pi)) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(t - t_0)), \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.13)$$

Utilizando las fórmulas análogas a (5.10)-(5.11) para $\delta'(t - t_0)$, obtenemos otras identidades igualmente interesantes

$$\delta'(t - t_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n(\operatorname{sen}(nt_0) \cos(nt) - \cos(nt_0) \operatorname{sen}(nt)), \quad t \in (-\pi, \pi) \quad (5.14)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - (t_0 + 2k\pi)) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n(\operatorname{sen}(nt_0) \cos(nt) - \cos(nt_0) \operatorname{sen}(nt)), \quad t \in (-\pi, \pi) \quad (5.15)$$

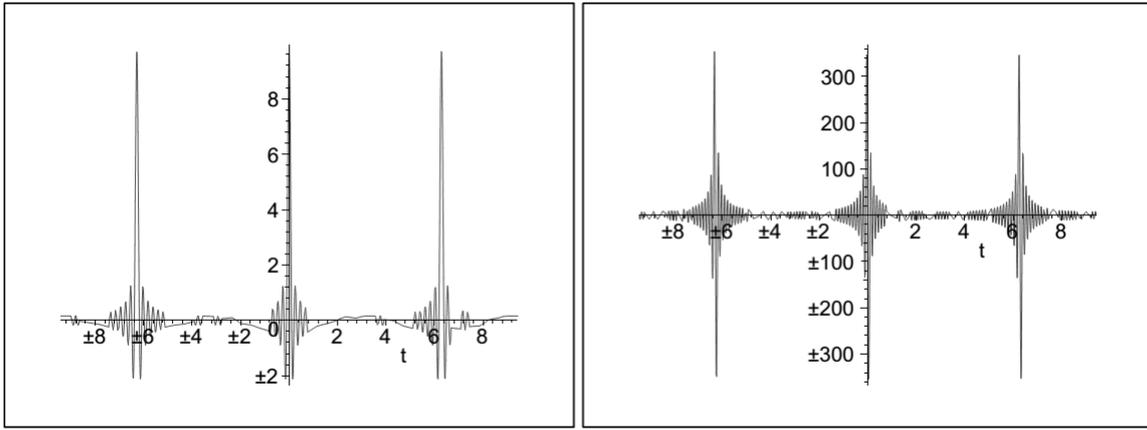


Figura 5.4: Aproximación de Fourier para la Delta de Dirac y su derivada en el origen.

La figura (5.4) muestra las sumas parciales (con cincuenta términos cada una) de las series de Fourier asociadas a la Delta de Dirac en el origen y su derivada en $[-\pi, \pi]$, aunque representadas en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$. Por supuesto, se pueden obtener expresiones análogas para la derivadas de orden superior.

Otra cuestión interesante tiene que ver con la relación que existe entre la serie de Fourier de $f'(t)$ y la derivada de la serie de Fourier asociada a $f(t)$. Vamos a ver que en ocasiones coinciden y que en otros casos no. Para fijar ideas, supongamos que $f(t)$ es una función C^1 a trozos en $[-\pi, \pi]$, que tiene eventualmente una discontinuidad de salto finito en un punto t_1 y que existe $f'(t)$ para cada $t \neq t_1$. Como hemos hecho anteriormente, denotamos

$$g(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{si } t \in (-\pi, t_1) \\ f'(t) & \text{si } t \in (t_1, \pi) \end{cases}$$

Vamos a estudiar la relación existente entre los coeficientes de Fourier asociados a f y g , que designaremos por (a_n, b_n) y (a'_n, b'_n) , respectivamente. Integrando por partes las expresiones iniciales se sigue que

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{t_1} f'(t) dt + \int_{t_1}^{\pi} f'(t) dt \right) = \frac{1}{\pi} (f(t_1^-) - f(-\pi^+) + f(\pi^-) - f(t_1^+)). \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{t_1} f'(t) \cos(nt) dt + \int_{t_1}^{\pi} f'(t) \cos(nt) dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(f(t) \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{t_1} + n \int_{-\pi}^{t_1} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt + f(t) \cos(nt) \Big|_{t_1}^{\pi} + n \int_{t_1}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt \right) = \quad (5.17) \\ &= \frac{1}{\pi} ((f(t_1^-) - f(t_1^+)) \cos(nt_1) + (f(\pi^-) - f(-\pi^+)) \cos(n\pi)) + nb_n. \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \operatorname{sen}(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{t_1} f'(t) \operatorname{sen}(nt) dt + \int_{t_1}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen}(nt) dt \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(f(t) \operatorname{sen}(nt) \Big|_{-\pi}^{t_1} - n \int_{-\pi}^{t_1} f(t) \cos(nt) dt + f(t) \operatorname{sen}(nt) \Big|_{t_1}^{\pi} - n \int_{t_1}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right) = \quad (5.18) \\
&= \frac{\operatorname{sen}(nt)}{\pi} (f(t_1^-) - f(t_1^+)) n a_n \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (5.16)-(5.18), se llega a las siguientes conclusiones:

1. Si f es continua en t_1 y $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$, la serie de Fourier de g coincide con la derivada (término a término) de la serie de Fourier asociada a f , ya que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi),$$

mientras que

$$g(t) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nt) + b'_n \operatorname{sen}(nt)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \operatorname{sen}(nt) + nb_n \cos(nt)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi), t \neq t_1,$$

dado que $a'_0 = 0$, $a'_n = nb_n$ y $b'_n = -na_n$.

2. Si f no es continua en t_1 , pero $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$, la serie de Fourier de la derivada de f en el sentido de las distribuciones coincide con la derivada (término a término) de la serie de Fourier asociada a f en $(-\pi, \pi)$, ya que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi), t \neq t_1$$

mientras que usando (5.12) se tiene

$$g(t) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nt) + b'_n \operatorname{sen}(nt)) = (f(t_1^-) - f(t_1^+)) \delta(t - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \operatorname{sen}(nt) + nb_n \cos(nt))$$

o equivalentemente,

$$f'(t) = g(t) + (f(t_1^-) - f(t_1^+)) \delta(t - t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \operatorname{sen}(nt) + nb_n \cos(nt))$$

3. Si f no es continua en t_1 y $f(-\pi^+) \neq f(\pi^-)$, aparece además otra Delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nt) + b'_n \operatorname{sen}(nt)) = \\
&= (f(t_1^-) - f(t_1^+)) \delta(t - t_1) + (f(\pi^-) - f(-\pi^+)) \delta(t - \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \operatorname{sen}(nt) + nb_n \cos(nt))
\end{aligned}$$

que se corresponde con la discontinuidad de salto finito que aparece en los múltiplos de π , cuando se extiende la función f por periodicidad.

Ejemplo 5.2.3. Podemos comprobar que

$$|t| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt), \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

Como $f(t) = |t|$ es continua y de clase C^1 a trozos en $[-\pi, \pi]$ y además $f(\pi) = f(-\pi)$, obtenemos el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(t) = \text{signo}(t)$, sin más que derivar término a término la expresión anterior:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n} \text{sen}(nt) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in (-\pi, 0) \\ 0 & \text{si } t \in \{-\pi, 0, \pi\} \\ 1 & \text{si } t \in (0, \pi) \end{cases}$$

Si queremos seguir derivando ahora esta expresión en el sentido de las distribuciones, nos encontramos que

$$\delta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi} \cos(nt), \quad \forall t \in (-\pi, \pi).$$

A partir de esta identidad extendida por periodicidad a todo \mathbb{R} , se llega a que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - k\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi} \cos(nt), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Y si seguimos derivando

$$\delta'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n((-1)^n - 1)}{\pi} \text{sen}(nt), \quad \forall t \in (-\pi, \pi).$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta'(t - k\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n((-1)^n - 1)}{\pi} \text{sen}(nt), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5.2.5. Las EDP y la Delta de Dirac

1. Al comienzo de este capítulo se estudiaron algunas aplicaciones de la transformada de Fourier a la resolución de distintas EDP, cuando el dominio espacial es \mathbb{R} . Más concretamente, resolvimos el problema de difusión del calor en un alambre *infinito*, conociendo la temperatura inicial en cada punto.

$$(PC) \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 & \text{Ec. de Calor} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} & \text{Condición inicial} \end{cases}$$

obteniendo que la solución viene dada por

$$u(x, t) = f(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

Como se aprecia, en la expresión anterior tiene un protagonismo destacado la función

$$E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

que se denomina **núcleo gaussiano** ó **solución fundamental** de la Ec. del Calor. Considerando que t juega el papel del parámetro que tiende hacia 0, no es difícil identificar la función anterior como una de las familias de la sección 5.2 que definen la Delta de Dirac en $x = 0$ en el sentido de que

$$E(x, t) \rightarrow \delta(x), \text{ cuando } t \rightarrow 0$$

2. De manera similar puede decirse de la solución del problema elíptico en un semiplano

$$(PD) \begin{cases} u_{yy}(x, y) + u_{xx}(x, y) = 0 & x \in \mathbb{R}, y > 0 \text{ Ec. de Laplace} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \text{ Condición de contorno} \end{cases}$$

cuya solución quedaba expresada como

$$u(x, y) = f(x) * c_n \frac{y}{y^2 + x^2} = c_n \int_{\mathbb{R}} f(x - z) \frac{y}{z^2 + y^2} dz$$

En este caso, la función

$$P(x, y) = c_n \frac{y}{y^2 + x^2}$$

es la que juega un papel fundamental en la resolución del problema y de manera similar a lo que pasaba en el caso anterior, considerando ahora que y es el parámetro que tiende hacia 0, se puede identificar esa función como otra de las familias de la sección 5.2 que definen la Delta de Dirac en $x = 0$, tomando $c_n = 1/\pi$

$$P(x, y) \rightarrow \delta(x), \text{ cuando } y \rightarrow 0$$

Observación 5.2.4. Podemos comprobar que el núcleo de Gauss es solución del problema de contorno

$$\begin{cases} E_t - E_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ E(x, 0) = \delta_0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde δ_0 es el delta de dirac en 0. El nombre de solución fundamental del calor se debe a que a través de ella podemos calcular la solución del problema de contorno (PC) con datos muy generales. Como ya se dijo la solución de (PC) puede ser expresada como

$$u = E * f$$

- $E(t) \rightarrow \delta_0$ cuando $t \rightarrow 0$ luego $u(t) \rightarrow f$, cuando $t \rightarrow 0$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}$.
- Por las propiedades de convolución tenemos que

$$u_{xx} = E_{xx} * f$$

y utilizando el teorema de convergencia dominada se cumple

$$u_t = E_t * f$$

luego u es solución del (PC).

Observación 5.2.5. De la solución de la ecuación del calor se deducen otras propiedades. Todas ellas admiten claras interpretaciones físicas y obedecen, efectivamente, al comportamiento habitual en un proceso de difusión. Mencionaremos algunas.

- **Principio del máximo:** Si $f \geq 0$ entonces $u \geq 0$ y en realidad $u > 0$ en $\mathbb{R}^n(0, \infty)$ salvo que $f \equiv 0$.

Esto es una consecuencia inmediata del hecho que $E > 0$.

- **Velocidad infinita de propagación.** Esta propiedad se deduce de la anterior. Consideramos como dato inicial $f = f(x)$ una función no-negativa y de soporte compacto, por ejemplo $f(x) = \chi(-1, 1)$, la función característica del intervalo $(-1, 1)$. La propiedad anterior demuestra que $u > 0$ en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ y en un tiempo $t > 0$ arbitrariamente pequeño.

Esto demuestra que la información se propaga a velocidad infinita en el modelo que la ecuación del calor representa. Este hecho suele utilizarse frecuentemente para cuestionar la validez del modelo pues la experiencia demuestra que el calor no se propaga a velocidad infinita. Existen de hecho algunas variantes de la ecuación del calor que corrigen esto utilizándola denominada *ecuación de medios porosos*

$$u_t - (u^m)_{xx} = 0$$

donde $m > 1$. Observemos que la ecuación del calor corresponde al caso $m = 1$.

Un análisis cuantitativo de este hecho muestra que este efecto de propagación a velocidad infinita es sumamente moderado.

Con el objeto de analizarlo consideremos con un poco más de detalle el caso en que $f = \chi(-1, 1)$. Entonces

$$u(x, t) = [E(x, t) * f(x)] = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy.$$

De esta expresión se observa que $u(x, t) > 0$ en todo punto.

Por otra parte, si $|x| > 2$, $|x - y| > |x| - 1$ para todo $y \in (-1, 1)$ por lo que

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \leq \int_{-1}^1 e^{-\frac{-(1-|x|)^2}{4t}} dy = 2e^{-\frac{-(1-|x|)^2}{4t}}.$$

Por lo tanto

$$|u(x, t)| \leq (\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{-(1-|x|)^2}{4t}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x| > 2, \quad \forall t > 0.$$

De esta expresión se deduce que, para todo $t > 0$, la función $u(x, t)$ tiende exponencialmente a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$. Por tanto, si bien el efecto de una fuente inicial de calor $f = \chi(-1, 1)$ localizada en el intervalo $(-1, 1)$ se percibe instantáneamente en toda la recta real, este es exponencialmente pequeño para los puntos que están lejos de esa fuente inicial de calor.

- **Efecto regularizante** . Como $E(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además es *acotada* para todo $t > 0$, de las propiedades elementales de la convolución deducimos que

$$u = E(x, t) * f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad ?t > 0$$

para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto, a pesar de que la ecuación del calor arranque de un dato inicial f meramente integrable (es decir integrable Lebesgue), la solución se hace infinitamente regular en un tiempo arbitrariamente pequeño.

5.3. Las EDP y el problema no homogéneo

En la práctica los problemas que en la vida real se plantean que son susceptibles a ser modelados mediante EDP no sólo tiene como dato la configuración inicial del sistema sino también las fuentes o fuerzas que pueden modificar, perturbar o determinar su dinámica temporal esto nos conduce al problema no homogéneo.

En el caso de la ecuación del calor el problema correspondiente es de la forma

$$(PCNH) \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = g(x, t) & x \in \mathbb{R}, y > 0 \quad \text{Ec. de calor no homogéneo} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \quad \text{Condición de contorno} \end{cases}$$

En este sistema $f(x)$ describe la distribución inicial del calor mientras que $g(x, t)$ es una fuente externa que varían en tiempo con una distribución desigual en espacio.

Para resolver este sistema tenemos la combinación de la TF y de la clásica fórmula de variación de parámetros para EDO, una vez más supondremos que todas las funciones que aparecen en el sistema nos permiten realizar los cálculos que efectuaremos en adelante y así obtener la solución (PCNH).

Resolver el sistema (PCNH) será equivalente a resolver los siguientes sistemas

$$(1) \begin{cases} v_t(x, t) - v_{xx}(x, t) = g(x, t) & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ v(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ w(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

luego por superposición de soluciones

$$u = v + w$$

donde v es solución de (1) y w es solución de (2). Veamos que efectivamente esto se cumple

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

$$u_t = v_t + w_t$$

$$u_{xx} = v_{xx} + w_{xx}$$

luego

$$u_t - u_{xx} = (v_t + w_t) - (v_{xx} + w_{xx})$$

$$u_t - u_{xx} = \underbrace{(v_t - v_{xx})}_{g(x,t)} + \underbrace{(w_t - w_{xx})}_0$$

$$u(x, 0) = \underbrace{v(x, 0)}_0 + \underbrace{w(x, 0)}_{f(x)}$$

La solución del sistema (2) ya lo hemos encontrado anteriormente y esta dado por

$$w = E(x, t) * f(x)$$

Para el sistema (1) primero aplicaremos la TF en la variable x para reducirlo a una EDO no homogénea y la solución la buscamos por el método de variación de parámetros con lo cual el sistema nos quedaría

$$\begin{cases} V_t - (-4\pi^2\xi^2)V = \hat{g}(\xi, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ V(\xi, 0) = 0 & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

sin pérdida de generalidad esto es lo mismo que resolver el sistema tomando $x_0 = 0$

$$\begin{cases} V_t - (-4\pi^2\xi^2)V = \hat{g}(\xi, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ V(\xi, 0) = x_0 & \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

pero encontrar la solución de este sistema es encontrar

$$V = V_h + V_p$$

donde V_h y V_p son la solución homogénea y particular respectivamente, para encontrar V_h consideremos $\hat{g}(\xi, t) = 0$ cuya solución después de imponerse la condición inicial será

$$V_h = x_0 e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

luego cuando $\hat{g}(\xi, t) \neq 0$ buscamos una solución de la forma (queremos encontrar nuestra solución particular)

$$V = e^{-4\pi^2\xi^2 t} y(t)$$

donde $y(t)$ debe cumplir

$$y'(t) = e^{4\pi^2\xi^2 t} \hat{g}(x, t), \quad y(0) = x_0$$

de donde deducimos que

$$y(t) = \int_0^t e^{4\pi^2\xi^2 s} \hat{g}(x, s) ds + x_0$$

solo resta escribir V_p con los datos encontrados

$$V_p = e^{-4\pi^2\xi^2 t} \left(\int_0^t e^{4\pi^2\xi^2 s} \hat{g}(x, s) ds + x_0 \right)$$

luego la solución del sistema (1) estará dado por $V = V_h + V_p$

$$V = x_0 e^{-4\pi^2\xi^2 t} + e^{-4\pi^2\xi^2 t} \left(\int_0^t e^{4\pi^2\xi^2 s} \hat{g}(x, s) ds + x_0 \right)$$

$$V = x_0 e^{-4\pi^2\xi^2 t} + \left(\int_0^t e^{-(4\pi^2\xi^2 t - 4\pi^2\xi^2 s)} \hat{g}(x, s) ds + e^{-4\pi^2\xi^2 t} x_0 \right)$$

como $x_0 = 0$ tenemos que

$$V = \int_0^t e^{-4\pi^2\xi^2(t-s)} \hat{g}(x, s) ds$$

finalmente aplicando TF inversa y usando las propiedades del producto convolución del capítulo 3 y por el corolario (3.2.19)

$$v = \int_0^t E(x, t-s) * g(x, s) ds$$

Ahora estamos en condiciones de dar una expresión a la solución del (*PCNH*) recordemos que

$$u = w + v$$

luego $u(x, t)$

$$u(x, t) = E(x, t) * f(x) + \left(\int_0^t E(x, t - s) * g(x, s) ds \right)$$

En la solución se puede observar en el primer término la distribución inicial de la temperatura mientras que el segundo incorpora la contribución de la fuente externa, esta es una media temporal de expresiones de la forma $E(x, t - s) * g(x, s)$ que son en realidad las soluciones de la ecuación del calor en el instante $t - s$ que arrancan en el dato inicial $g(s)$. Vemos pues que la contribución de un segundo miembro en la ecuación es semejante a la del dato inicial promediada en tiempo.

5.4. Conclusión

Vimos la aplicación de la TF a problemas de contorno, definidos en dominios no acotados y cómo transforma las EDP en EDO.

Si bien no garantizamos la unicidad de las soluciones encontradas, ya que para ello necesitaremos abordar las EDP y los problemas de contorno con conceptos más generales como el de hipersuperficies, el teorema de Cauchy-Kovalevskaya o el teorema de Holmgren.

Gracias a las soluciones encontradas podemos analizar sus propiedades que admiten interpretaciones claramente físicas como son las de:

- velocidad infinita de propagación.
- efecto regularizante.

Apéndice

5.5. Apéndice Definiciones y Conceptos Usados

Definición 5.5.1. Producto Interno ó Escalar

Sea V un espacio vectorial asociado a un cuerpo K , con una función $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ es un producto interno si cumple:

1. $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
2. $\forall u, v, w \in V, \lambda \in K : \langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\forall u \in V : \langle u, u \rangle > 0$ si $u \neq 0$

Definición 5.5.2. Espacio Pre-Hilbert

Todo espacio vectorial V en el cual es posible definir un producto interno, se llama Espacio Pre-hilbert.

Definición 5.5.3. Norma de un Vector

La norma inducida por \langle, \rangle viene definida por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \forall u \in V.$$

Definición 5.5.4. Funciones Casi-Continuas

Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Diremos que una función f es casi-continua en I si existen $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, f restringida a (x_i, x_{i+1}) es continua y existen los siguientes límites $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_{i+1}^-} f(x)$ para todo $i = 0 \dots n - 1$.

Las funciones continuas son un caso particular de las funciones casi-continuas.

El conjunto de todas las funciones casi-continuas constituyen un espacio vectorial. Podemos extender el concepto de las funciones casi-continuas a intervalos infinitos y extender también el número de puntos aislados a un número infinito numerable.

Definición 5.5.5. Sea $V = L^2(\mathbb{R}^n)$, esto es, el espacio vectorial de las funciones medibles Lebesgue de cuadrado integrable. Se define en V el siguiente producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \forall f, g \in V$$

Notemos que en $L^2(\mathbb{R}^n)$ dos funciones que coinciden en todo \mathbb{R}^n salvo en un conjunto de medida nula se consideran iguales. Por lo tanto, el elemento neutro es la función que se anula en casi todo punto de \mathbb{R}^n .

El concepto de conjunto ortogonal de funciones es una generalización del concepto de conjunto ortogonal de vectores, *una función puede considerarse como un vector generalizado*.

Definición 5.5.6. Diremos que el conjunto $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ es ortogonal si $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$ para todo $n \neq m$.

Definición 5.5.7. Conjunto Ortonormal de Funciones

Diremos que $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ es ortonormal si $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}$, donde $\delta_{n,m}$ es el delta de Kronecker definido por

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m, \end{cases}$$

para todo n, m .

Definición 5.5.8. Conjunto Total o Completo

Sea X un subconjunto de un espacio pre Hilbert V , el espacio generado por X es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de X y es denotado por $\langle X \rangle$.

Diremos que X es total o completo si $\overline{\langle X \rangle} = V$, esto es, $\forall u \in V, \exists \alpha_n \in \langle X \rangle$ tal que $\|\alpha_n - u\| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición 5.5.9. Espacio de Hilbert

El espacio pre Hilbert H , es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la norma heredada del producto interno.

Observación 5.5.1. Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortogonal de funciones de V . Si $\|g_n\| \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi_n = \|g_n\|^{-1} g_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Luego, el sistema $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es ortonormal.

Definición 5.5.10. Suma parcial de Fourier

Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en V . La suma parcial de Fourier respecto a $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de un elemento $u \in V$ se define por

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j, \text{ con } c_j = \langle u, \varphi_j \rangle.$$

Definición 5.5.11. Serie de Fourier Generalizada

Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal de funciones en V completo. Entonces, para cada $f \in V$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

es la serie de Fourier generalizada donde c_n

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx$$

es llamado **el coeficiente de Fourier** n -ésimo de f con respecto a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 5.5.12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Definimos las funciones $S_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $S_m(x) = \sum_{n=1}^m f_n(x)$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

1. uniformemente, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in I$;
2. puntualmente, si para cualquier $x \in I$ y $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

Teorema 5.5.1. Criterio M de Weierstrass Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\{M_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números positivos que verifica las siguientes condiciones:

1. para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in I$, $|f_n(x)| \leq M_n$,
2. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Entonces existe una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in I$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (absolutamente) a $f(x)$. Además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f .

Teorema 5.5.2. Convergencia Dominada Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de E en \mathbb{R} , g una función integrable no negativa en E , y $f : E \rightarrow \mathbb{C}$, de modo que

1. para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in E$.
2. para casi todo $x \in E$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Entonces f es integrable y $\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n$

Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E .

Teorema 5.5.3. Categoría de Baire. Si E es un espacio métrico completo, o un espacio topológico localmente compacto, entonces todo subconjunto abierto no vacío de E es de segunda categoría en E . En particular, E es de segunda categoría en sí mismo. Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

Teorema 5.5.4. Gráfico Cerrado. Sean X e Y espacios de Banach, y sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es continuo.
2. T es cerrado.

Definición 5.5.13. Sea E un K -espacio vectorial y sea \mathcal{T} una topología sobre E . Se dice que \mathcal{T} es compatible con la estructura de espacio vectorial de E si las aplicaciones

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E & , & & K \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y & & & (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

son continuas. El espacio (E, \mathcal{T}) dotado de dicha estructura se llama *espacio vectorial topológico* (e.v.t.).

Definición 5.5.14. Sea E un espacio vectorial topológico con topología \mathcal{T} decimos que es **localmente convexo** si existe una base local \mathcal{B} cuyo elementos son convexos.

Definición 5.5.15. Un espacio E localmente convexo, se llama metrizable si existe una métrica en E tal que la topología original de E coincide con la definida por la métrica.

Teorema 5.5.5. Criterio de Kolmogorov. Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo, son equivalentes

1. E es normable.
2. E es separable y existe un entorno acotado del origen.

Bibliografía

- [1] Rudin, W., Análisis Real y Complejo. Alhambra, Madrid, 1979.
- [2] Kolmogorov, A. N., Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis funcional. Editorial Mir, Moscú, 1972.
- [3] Stein, E. M., Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princenton University, 1971.
- [4] Peral Alonso, I. Ecuaciones en Derivadas Parciales. Madrid, 2001.
- [5] Weinberger, Hans F. A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods. Dover Publications, INC. New York.
- [6] Churchill, R. V., Series de Fourier y Problemas de Contorno. McGrawHill, Mexico, 1972.
- [7] Zill, Dennis G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. Intemational Thomson Editores, Mexico, 1977.
- [8] Casas, E., Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Universidad de Cantabria, 1992.
- [9] Folland, G. B., Fourier analysis and its applications. Wadsworth and Brooks, 1992.
- [10] Renardy, M. y Rogers, R. C. , An introduction to Partial Differential Equations. Springer, 2004.
- [11] Elkacimi Alaoui, A., Introducción al Análisis Funcional, Reverte, Barcelona, 1994.
- [12] Rubiano, Gustavo N. Topologia General. Universidad Nacional de Colombia, Bogota, 2002.
- [13] Cerdá M., Joan, Análisis Real. Universidad de Barcelona, Barcelona, 1996.
- [14] Larsen, R., Functional Analysis an introduction. Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, New York, 1973.
- [15] Luis A. Fernández, Métodos Matemáticos Avanzados . Universidad de Cantabria, Junio 2009.
- [16] Ginés López P., Apuntes de Teoría de Distribuciones .Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada.